Prof. Dr. Matthias Lesch
Dr. Boris Vertman Wintersemester 2013-14

12. Übung Globale Analysis I

Abgabe am Mittwoch, den 22. Januar 2014 nach der Vorlesung

Aufgabe 1. (5 Punkte)

Es seien A_i, B_i, $i = 1, \dots, 5$, $\mathbb{K}$-Vektoräume (oder R-Moduln). Betrachte das folgende kommutative Diagramm von Homomorphismen.

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "a_2"] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r, "a_3"] \arrow[d, "f_3"] & A_4 \arrow[r, "a_4"] \arrow[d, "f_4"] & A_5 \arrow[d, "f_5"] \\
B_1 \arrow[r, "b_1"] & B_2 \arrow[r, "b_2"] & B_3 \arrow[r, "b_3"] & B_4 \arrow[r, "b_4"] & B_5
\end{tikzcd}$$

Es seien die Zeilen exakt. Beweisen Sie folgende Aussagen.

(i) Seien f_2, f_4 injektiv und f_1 surjektiv. Dann ist f_3 injektiv.

(ii) Seien f_2, f_4 surjektiv und f_5 injektiv. Dann ist f_3 surjektiv.

Insbesondere ist f_3 ein Isomorphismus, falls f_1, f_2, f_4, f_5 Isomorphismen sind.

Aufgabe 2. (5 Punkte) [De Rham-Kohomologie des n-Torus.]

Es sei $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.

(i) Begründe, warum $H^0(\mathbb{T}^n) = \mathbb{R}$.

(ii) Es sei $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $\omega = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) dx_i \in \Omega^1(\mathbb{T}^n)$, d.h. die Koeffizienten φ_i sind $\mathbb{Z}^n$-periodisch. Es sei ω geschlossen. Zeige, dass dann für alle $i = 1, .., n$ die Funktionen

$$(x_1, \dots \widehat{x}_i \dots x_n) \mapsto \int_0^1 \varphi_i(x_1, \dots, x_n) dx_i$$

konstant sind.

(iii) Es sei ω wie oben in (ii). Zeige, dass ω genau dann exakt ist, wenn für alle $i = 1, .., n$

$$\int_0^1 \varphi_i(0, \dots x_i \dots 0) dx_i = 0.$$

Man folgere, dass $H^1(\mathbb{T}^n) = \mathbb{R}[dx_1] \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}[dx_n]$.

(iv) Es sei $\omega = f(x, y) dx \wedge dy$ eine 2-Form auf $\mathbb{T}^2$, d.h. f ist $\mathbb{Z}^2$-periodisch. Zeige, dass ω genau dann exakt ist, wenn

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy = 0.$$

Folgere, dass $H^2(\mathbb{T}^2) = \mathbb{R}[dx \wedge dy]$.

Hinweis zu (iv): Man betrachte die Form $\eta = \varphi(x,y)dx + \psi(x,y)dy$ mit

$$\varphi(x,y) = -\int_0^y \int_0^1 f(x',y')dx'dy', \quad \psi(x,y) = \int_0^x f(x',y)dx' - x\int_0^1 f(x',y)dx'.$$

Wann ist η eine glatte 1-Form auf $\mathbb{T}^2$?

Aufgabe 3. (10 Punkte)

[Poincaré-Lemma für de Rham-Kohomologie mit kompaktem Träger]

Es sei $\Omega_c(M) := \{\omega \in \Omega(M) \mid \operatorname{supp}\omega \text{ kompakt}\}$ für eine glatte Mannigfaltigkeit M. Offenbar gilt $d(\Omega_c^p(M)) \subset \Omega_c^{p+1}(M)$. Wir setzen

$$H_c^k(M) := \big(\ker d\colon\, \Omega_c^k(M) \to \Omega_c^{k+1}(M)\big)/\big(\operatorname{im} d\colon\, \Omega_c^{k-1}(M) \to \Omega_c^k(M)\big).$$

Man beachte, dass jede Form $\omega \in \Omega_c(M \times \mathbb{R})$ von der Form

$$\omega = \omega_1(t) + \omega_2(t) \wedge dt$$

ist, wobei $\omega_i \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \Omega_c(M))$. Es sei $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ mit $\int\limits_{\mathbb{R}} \eta(t)dt = 1$. Setze:

(a) $p_*\colon\, \Omega_c^p(M \times \mathbb{R}) \to \Omega_c^{p-1}(M)$, $p_*\omega := \int\limits_{\mathbb{R}} \omega_2(s)ds$, "Integration entlang der Faser".

(b) $e_*\colon\, \Omega_c^{p-1}(M) \to \Omega_c^p(M \times \mathbb{R})$, $e_*\omega := \omega \wedge \eta = \eta_1(t) \cdot \omega \wedge dt$.

(c) $K\colon\, \Omega_c^p(M \times \mathbb{R}) \to \Omega_c^{p-1}(M \times \mathbb{R})$, $K\omega := (-1)^p\Big(\int\limits_{-\infty}^{t} \omega_2(s)ds - \int\limits_{\mathbb{R}} \omega_2(s)ds \cdot \int\limits_{-\infty}^{t} \eta\Big)$.

Man zeige:

(i) $H_c^k(M)$ ist eine Diffeomorphie-Invariante und $H_c^k(\mathbb{R}) = \begin{cases} 0, & k = 0, \\ \mathbb{R}, & k = 1. \end{cases}$

(ii) $d\omega = d\omega_1(t) + \big((-1)^p \frac{\partial \omega_1}{\partial t}(t) + d\omega_2(t)\big) \wedge dt$.

(iii) $p_*\colon\, \Omega_c(M \times \mathbb{R}) \to \Omega_c(M)$ ist ein Komplexhomomorphismus vom Grad -1.

(iv) $e_*\colon\, \Omega_c(M) \to \Omega_c(M \times \mathbb{R})$ ist ein Komplexhomomorphismus vom Grad $+1$.

(v) $e_* \circ p_* - \operatorname{Id} \;=\; d \circ K + K \circ d, \quad p_* \circ e_* = \operatorname{Id}.$

(vi) Folgere, dass p_* einen Isomorphismus

$$H(p_*)\colon\, H_c^k(M \times \mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} H_c^{k-1}(M)$$

induziert. Mit (i) gilt insbesondere $H_c^k(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} 0, & k < n, \\ \mathbb{R}, & k = n. \end{cases}$

(vii) Ist die kompakt getragene de Rham Kohomologie eigentlich homotopie-invariant?

Aufgabe 4. (5 Punkte) [Mayer-Vietoris-Sequenz für de Rham-Kohomologie mit kompaktem Träger]

Es seien $U, V \subset M$ offen und $M = U \cup V$. Es seien $\iota_U \colon \Omega_c(U) \to \Omega_c(M)$, $\iota_V : \Omega_c(V) \to \Omega_c(M)$, $\nu_U \colon \Omega_c(U \cap V) \to \Omega_c(U)$, $\nu_V \colon \Omega_c(U \cap V) \to \Omega_c(V)$ jeweils die natürlichen "Fortsetzung-durch-0"-Abbildungen. Man zeige, dass die Mayer-Vietoris-Sequenz für Differentialformen mit kompaktem Träger

$$0 \to \Omega_c(U \cap V) \stackrel{(-\nu_U, \nu_V)}{\longrightarrow} \Omega_c(U) \oplus \Omega_c(V) \stackrel{\iota_U + \iota_V}{\longrightarrow} \Omega_c(M) \to 0$$

exakt ist. Folgere hieraus eine lange exakte Sequenz für die Kohomologie mit kompaktem Träger.