Prof. Dr. Matthias Lesch
Dr. Boris Vertman

Wintersemester 2013-14

11. Übung Globale Analysis I

Abgabe am Mittwoch, den 15. Januar 2014 nach der Vorlesung

Aufgabe 1. (5 Punkte). Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in C^\infty(U, \mathbb{C})$, nicht notwendigerweise holomorph. Weiterhin sei $A \subset U$ ein Kompaktum mit glattem Rand und $a \in \mathring{A}$ ein Punkt aus dem offenen Inneren von A. Beweisen Sie

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{f(z)}{z-a} dz + \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{A_\varepsilon} \frac{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z)}{z-a} dz \wedge d\overline{z},$$

wobei $A_\varepsilon = \{z \in A \mid |z-a| \geq \varepsilon\}$.

Aufgabe 2. (5 Punkte) Sei $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die Standardsphäre im $\mathbb{R}^{n+1}$. Sei $A_n(p) = -p$ die Antipodenabbildung auf $\mathbb{S}^n$.

(i) Berechne den Abbildungsgrad von A_n für alle n.

(ii) Zeige, dass A_n homotop zur Identität ist, falls n ungerade ist.

(iii) Zeige: Es gibt genau dann ein nirgends verschwindendes Vektorfeld auf $\mathbb{S}^n$, wenn n ungerade ist.

Hinweis: Im geraden Fall liefert ein nirgends verschwindendes Vektorfeld auf natürliche Weise eine Homotopie zwischen der Identität und der Antipodenabbildung.

Aufgabe 3. (5 Punkte). Sei $X \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ein Vektorfeld und (M_n) eine gegen $x \in \mathbb{R}^n$ konvergente Folge von Teilmengen mit glattem orientierbarem Rand. Dabei heißt eine Folge von Teilmengen $M_n \subset \mathbb{R}^n$ gegen x konvergent, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $M_n \subset B_\varepsilon(x)$ für alle $n \geq n_0$. Zeigen Sie die folgende Identität

$$\operatorname{div} X(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\operatorname{vol}(M_n)} \int_{\partial M_n} \langle X, \nu \rangle \operatorname{vol}_{\partial M_n},$$

wobei ν das äußere Einheitsnormalenfeld bezeichnet.

Aufgabe 4. (5 Punkte). Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\omega \in \Omega^1(M)$ mit $d\omega = 0$.

(i) Sei $\gamma_s : [a,b] \to M, s \in [0,1]$ eine glatte Homotopie von Wegen zwischen fixen Punkten $x_a, x_b \in M$, mit $\gamma_s(a) = x_a, \gamma_s(b) = x_b$ für alle $s \in [0,1]$. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\gamma_s} \omega = \int_a^b \gamma_s^* \omega$$

unabhängig von s ist.

(ii) Sei M einfach zusammenhängend, das heißt M ist zusammenhängend und für je zwei Punkte $p, q \in M$ sind alle Wege von p nach q zueinander homotop. Auf glatten Mannigfaltigkeiten sind ferner zwei glatte Wege zueinander homotop, wenn sie C^∞-homotop sind. Zeigen Sie, dass es ein $f \in C^\infty(M)$ existiert, so dass $\omega = df$.