Prof. Dr. Matthias Lesch
Dr. Boris Vertman Wintersemester 2013-14

10. Übung Globale Analysis I

Abgabe am Mittwoch, den 8. Januar 2014 nach der Vorlesung

Aufgabe 1. (5 Punkte). Sei M eine kompakte Riemannsche Fläche und $\omega \in \Omega^{(1,0)}_{\mathbb{C}}(M)$ eine 1-Form vom Typ $(1,0)$. ω heißt holomorph, falls für alle $p \in M$ eine holomorphe Kartenumgebung (U,z) und eine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(U)$ existieren, so dass $\omega|_U = f dz$. Sei nun $p \in M$ und $\omega \in \Omega^{(1,0)}_{\mathbb{C}}(M \backslash \{p\})$ holomorph, sowie eine zentrierte Kartenumgebung (U,z) mit $z(p) = 0$, so dass $\omega = f dz$. Sei $0 \in \mathbb{C}$ eine isolierte Singularität von $f(z)$. Wir setzen

$$\mathrm{Res}_p\, \omega := \mathrm{Res}_0 f(z).$$

(i) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Res}_p\, \omega$ wohldefiniert ist, das heißt unabhängig von der Wahl einer holomorphen Kartenumgebung um p.

(ii) Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass für holomorphe Funktionen $f \in \mathcal{O}(M \backslash \{p\})$ mit isolierter Singularität in $p \in M$, das analog definierte Residuum $\mathrm{Res}_p f$ nicht kartenunabhängig ist.

Der Residuumsbegriff auf Riemannschen Flächen kann somit nur für 1-Formen und nicht für Funktionen in sinnvoller Weise erklärt werden.

Aufgabe 2. (5 Punkte). Sei M eine kompakte Riemannsche Fläche und $\mathcal{D} \subset M$ eine diskrete Teilmenge. Sei $\omega \in \Omega^{(1,0)}_{\mathbb{C}}(M \backslash \mathcal{D})$, so dass um jeden Punkt $p \in \mathcal{D}$ in einer holomorphen Kartenumgebung $(U,z), \omega|_U = f dz, f \in \mathcal{O}(U \backslash \{p\})$. Zeigen Sie, dass dann

$$\sum_{p \in \mathcal{D}} \mathrm{Res}_p\, \omega = \frac{1}{2\pi i} \int_M d\omega.$$

Begründen Sie insbesondere die Existenz des Integrals auf der rechten Seite.

Aufgabe 3. (5 Punkte). Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit und L ein komplexes Linienbündel über M. Sei $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ eine offene Überdeckung durch Bündelkarten mit zugehörigem Kozyklus $\{g_{\alpha,\beta}\}, g_{\alpha,\beta} \in C^\infty(U_\alpha \cap U_\beta, \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C})$, und $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ eine untergeordnete glatte Zerlegung der Eins. Wir setzen auf jeder Umgebung U_α

$$\omega((g_{\alpha,\beta}),(\rho_\alpha)) := \frac{1}{2\pi i} \sum_{\gamma \in \mathcal{A}} d(\rho_\gamma d \log g_{\gamma,\alpha}).$$

(i) Zeigen Sie, dass ω eine wohldefinierte geschlossene 2-Form auf M, die sogenannte Euler Form von L ist.

(ii) Sei $\{U'_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ eine weitere offene Überdeckung durch Bündelkarten mit zugehörigem Kozyklus $\{g'_{\alpha,\beta}\}$ und $\{\rho'_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ eine untergeordnete glatte Zerlegung der Eins. Zeigen Sie, dass dann $\omega((g_{\alpha,\beta}),(\rho_\alpha))$ und $\omega((g'_{\alpha,\beta}),(\rho'_\alpha))$ sich nur um eine geschlossene Form $d\eta, \eta \in \Omega^1_{\mathbb{C}}(M)$ unterscheiden.

Aufgabe 4. (5 Punkte). Sei $r \in C^\infty([0,1], \mathbb{R}_+)$ und

$$X := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = r(z)^2, z \in [0,1]\}$$

die zugehörige Rotationsfläche. Diese bildet eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, deren Metrik vom $\mathbb{R}^3$ induziert wird. Wählen Sie eine geeignete Parametrisierung und beschreiben Sie das Integral der Volumenform über X bezüglich dieser Parametrisierung in Abhängigkeit von r.