Prof. Dr. Matthias Lesch
Dr. Boris Vertman Wintersemester 2013-14

1. Übung Globale Analysis I

Abgabe am Mittwoch, den 23. Oktober nach der Vorlesung

Aufgabe 1. (3-2 Punkte)

Der komplex projektive Raum $\mathbb{CP}^n$ ist definiert als die Menge aller eindimensionalen komplexen Unterräume des $\mathbb{C}^{n+1}$. Jeder solche Unterraum wird durch die Äquivalenzklasse

$$[z_0 : \ldots : z_n] := \{(z_0', ..., z_n') \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \exists \lambda \in \mathbb{C}^* : z_j = \lambda z_j' \text{ für alle } j = 0, ..., n\}$$

beschrieben.

(i) Zeigen Sie, dass $\mathbb{CP}^n$ mit einer differenzierbaren Struktur versehen werden kann und geben Sie diese an.

(ii) Zeigen Sie, dass sich die stereographische Projektion

$$\begin{aligned} S^2 \setminus \{N = (0,0,1)\} &\to \mathbb{CP}^1 \setminus \{[1:0]\} \\ (x,y,t) &\mapsto [\tfrac{x+iy}{1-t} : 1] \end{aligned}$$

zu einem Diffeomorphismus $S^2 \to \mathbb{CP}^1$ fortsetzt.

Aufgabe 2. (5 Punkte)

Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Zeige, dass das Tangentialbündel

$$TM := \{X_p \mid p \in M, X_p \in T_pM\}$$

mit einer differenzierbaren Struktur versehen werden kann und geben Sie diese an. Zeige weiter, dass die Projektionsabbildung $\pi\colon TM \to M$, gegeben durch $\pi(X_p) = p$, falls $X_p \in T_pM$, eine Submersion ist.
Hinweis: Sei (U, φ) eine Karte von M. Setze

$$\widetilde{\varphi}\colon \pi^{-1}(U) \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^n, \quad \widetilde{\varphi}(v) = (\varphi(\pi(v)), T_{\pi(v)}\varphi[v]).$$

Aufgabe 3. (5 Punkte)

Betrachte $\mathbb{R}$ mit der Äquivalenzrelation

$$x \sim -x :\Longleftrightarrow |x| > 1.$$

Diskutieren Sie mit Begründung welche Eigenschaften der Definition einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit für $\mathbb{R}/_\sim$ erfüllt sind.

Aufgabe 4. (5 Punkte). Sei $M = \{A \in \mathrm{Matr}(n,m,\mathbb{R}) \mid \mathrm{Rang}\, A = r\} \subset \mathbb{R}^{nm}$. Zeigen Sie, dass M eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $r(m+n-r)$ ist. Benutzen Sie hierzu den Satz über implizite Funktionen und beachten Sie, dass für $\begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}$ mit $B \in M(r,\mathbb{R})$ und $\mathrm{Rang}\, B = r$ genau dann $\mathrm{Rang}\, A = r$ gilt, wenn $E - DB^{-1}C = 0$ (beweisbedürftig).