Prof. Dr. Catharina Stroppel
Dr. Stefan Schreieder Wintersemester 2016/17

Übungsblatt 5
Lineare Algebra 1

Aufgabe 1. (4 Punkte) *Die direkte Summe von Vektorräumen*
Sei K ein Körper, und seien $(V, +, \cdot)$ und $(W, +, \cdot)$ zwei K-Vektorräume.

(a) Zeige, dass die direkte Summe $V \oplus W := (V \times W, +, \cdot)$, d.h. die Menge $V \times W$ zusammen mit der in der Vorlesung definierten komponentenweisen Addition und Skalarmultiplikation, ein K-Vektorraum ist.

(b) Begründe kurz, dass für Untervektorräume $U_1 \subset V$ und $U_2 \subset W$, die Teilmenge $U_1 \times U_2$ von $V \times W$ ein Untervektorraum von $V \oplus W$ ist.

(c) Zeige oder widerlege, dass jeder Untervektorraum von $V \oplus W$ von der Gestalt $U_1 \times U_2$ für Untervektorräume $U_1 \subset V$ und $U_2 \subset W$ ist.

Aufgabe 2. (4 Punkte) *Vereinigung und Durchschnitt von Untervektorräumen*
Sei K ein Körper, $(V, +, \cdot)$ ein K-Vektorraum, und $U_1, U_2 \subset V$ Untervektorräume.

(a) Zeige, dass der Schnitt $U_1 \cap U_2$ ein Untervektorraum von V ist.

(b) Wann ist die Vereinigung $U_1 \cup U_2$ ein Untervektorraum von V? (Begründe die Antwort.)

Aufgabe 3. (4 Punkte)

(a) Sei K ein Körper, M eine Menge und sei $(V, +, \cdot)$ ein K-Vektorraum. Benutze die Vektoraddition und Skalarmultiplikation auf V, um auf der Menge

$$\mathrm{Abb}(M, V) := \{f \mid f : M \longrightarrow V \text{ eine Abbildung}\},$$

die Struktur eines K-Vektorraums zu definieren. D.h., man definiere geeignete Abbildungen

$$+ : \mathrm{Abb}(M, V) \times \mathrm{Abb}(M, V) \longrightarrow \mathrm{Abb}(M, V) \quad \text{und} \quad \cdot : K \times \mathrm{Abb}(M, V) \longrightarrow \mathrm{Abb}(M, V),$$

und zeige, dass damit $(\mathrm{Abb}(M, V), +, \cdot)$ die Axiome eines K-Vektorraums erfüllt.

(Hinweis: In der Vorlesung wurde der Spezialfall $V = K$ skizziert. Man vergewissere sich, dass in diesem Fall die Gültigkeit des Axiom (G3'), das in der Vorlesung nicht gezeigt wurde, aus dem Spezialfall $V = K$ von obiger Aufgabe folgt.)

(b) Betrachte nun den Spezialfall $K = V = M = \mathbb{R}$ in Teil (a). Wir nennen eine Abbildung $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ polynomial, falls eine natürliche Zahl n und reelle Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ existieren, sodass

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Zeige, dass die Teilmenge $\mathrm{Pol}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aller polynomialen Abbildungen einen Untervektorraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums $(\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$ bildet.

Bitte wenden.

Abgabe ist am **Freitag 25. November 2016**, vor (!) der Vorlesung, d.h. 10:00 – 10:15 Uhr.

Aufgabe 4. (4 Punkte)
Sei K ein Körper, und seien $v = (v_1, v_2)$ und $w = (w_1, w_2)$ zwei Vektoren in K^2. Zeige, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x &= a \cdot v_1 + b \cdot v_2 \\ y &= a \cdot w_1 + b \cdot w_2 \end{aligned}$$

für beliebige $x, y \in K$ eine Lösung $(a, b) \in K^2$ hat, genau dann wenn

$$v_1 \cdot w_2 - w_1 \cdot v_2 \neq 0,$$

wobei $\cdot$ jeweils die Multiplikation in K bezeichne.

Allgemeine Bemerkungen:

- Wenn nicht explizit ausgeschlossen, dürfen Sie Sätze und Resultate aus der Vorlesung ohne Beweis verwenden, müssen aber dabei immer die Nummer oder den Namen des Satzes, oder aber die Aussage des Satzes, angeben, sodass klar ist, welches Resultat Sie verwenden möchten.
- Bei Fragen zu diesem Übungszettel, wenden Sie sich bitte an Ihren Tutor, oder an den Assistenten (schreied@math.uni-bonn.de).
- Die neuen Übungsblätter können immer Freitags ab spätestens 12 Uhr von der Homepage der Vorlesung heruntergeladen werden: `http://www.math.uni-bonn.de/ag/la2016/LA1.htmpl`
- Lösungen zu den Übungszettel müssen Freitags **vor der Vorlesung**, d.h. 10:00 – 10:15 Uhr, eingereicht werden.

  Die Teilnehmer der Tutorien 5, 6, 7 und 8 werden gebeten, die Übungszettel direkt bei Ihrem Tutor während des Freitags Tutoriums von 8:00-10:00 Uhr abzugeben.
- Die korrigierten Übungszettel bekommen Sie in Ihrem Tutorium zurück; dort werden auch die Lösungen zu den Aufgaben besprochen.
- Für die Zulassung zur Klausur sind **mindestens 50%** der Übungspunkte erforderlich.
- Es wird ein **Help Desk** für Fragem zur Vorlesung und den Übungen angeboten. Dort steht Ihnen Montags 15:00–18:00 sowie Donnerstags 14:00–17:00 Uhr jeweils im Raum N1.002 (Endenicher Allee 60, Nebengebäude) ein Student eines höheren Semesters für Fragen zur Verfügung.
- Mehr Details finden Sie auf der oben genannten Homepage der Vorlesung.