Prof. Dr. Catharina Stroppel
Dr. Stefan Schreieder Wintersemester 2016/17

Übungsblatt 2
Lineare Algebra 1

Bemerkung: In der folgenden Aufgabe wird der Betrag $|x|$ einer reellen Zahl x verwendet. Zur Erinnerung: $|x| = x$, falls $x \geq 0$, und $|x| = -x$, falls $x < 0$.

Aufgabe 1. (4 Punkte)
Man betrachte folgende Mengen M mit der jeweils angegebenen Relation $\sim$. Entscheide jeweils (ohne Begründung), ob es sich um eine Äquivalenzrelation handelt.

(a) $M = \mathbb{R}$,

(i) $x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad |x| = |y|$;
(ii) $x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad |x - y| \leq 1$;
(iii) $x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad |x - y| \geq 1$;
(iv) $x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad |x - y| \in \mathbb{N}$.

(b) $M = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

(i) $x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad |\frac{x}{y}| \leq 1$;
(ii) $x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad |\frac{x}{y}| \geq 1$;
(iii) $x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad |\frac{x}{y}| = 1$.

(c) M sei die Menge aller Besucher aller Vorlesungen in Bonn,

(i) $x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad x$ und y besuchen eine gemeinsame Vorlesung.
(ii) $x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad x$ und y besuchen dieselbe Anzahl an Vorlesungen.

(d) M eine beliebige Menge, $x \sim y$ für alle $x, y \in M$.

Aufgabe 2. (4 Punkte)
Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Relation

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad n \text{ teilt } x - y$$

eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen definiert.

(a) Gib ein Repräsentantensystem dieser Äquivalenzrelation an.

(b) Sei $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} := \{\overline{x} \mid x \in \mathbb{Z}\}$ die Menge der Äquivalenzklassen, und betrachte die Abbildung

$$\circ : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad (\overline{x}, \overline{y}) \mapsto \overline{x + y}.$$

Man zeige direkt (also ohne den Satz über Quotientengruppen aus der Vorlesung zu verwenden), dass $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \circ)$ eine Gruppe ist.

Abgabe ist am **Freitag 4. November 2016**, vor (!) der Vorlesung, d.h. 10:00 – 10:15 Uhr.

Aufgabe 3. (4 Punkte) *Gruppen der Ordnung 3 sind abelsch*
Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass jede Gruppe der Ordnung 3 abelsch ist. Betrachte dazu eine Gruppe $(G, \circ)$ mit drei Elementen $G = \{e, a, b\}$, wobei e das neutrale Element bezeichne.

(i) Man zeige, dass G abelsch ist, falls $a \circ b = b \circ a$.

(ii) Folgere aus Teil (i), dass G abelsch ist, falls $a \circ b = e$.

(iii) Man zeige $a \circ b = e$. (Hinweis: Zeige dazu, dass sowohl $a \circ b = a$ als auch $a \circ b = b$ zu einem Widerspruch führt.)

Aufgabe 4. (4 Punkte)
Sei S_3 die Menge aller bijektiver Abbildungen $f : \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{1, 2, 3\}$. Wir betrachten die Abbildung

$$\circ : S_3 \times S_3 \longrightarrow S_3, \quad (f, g) \mapsto f \circ g,$$

wobei $f \circ g$ die Komposition f nach g bezeichne, d.h. $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

(a) Zeige, dass $(S_3, \circ)$ eine Gruppe ist.

(b) Ist $(S_3, \circ)$ eine abelsche Gruppe?

(c) Ist die Menge aller (nicht notwendig bijektiven) Abbildungen $f : \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{1, 2, 3\}$ zusammen mit der Komposition von Abbildungen als Verknüpfung eine Gruppe?

Allgemeine Bemerkungen:

- Wenn nicht explizit ausgeschlossen, dürfen Sie Sätze und Resultate aus der Vorlesung ohne Beweis verwenden, müssen aber dabei immer die Nummer oder den Namen des Satzes, oder aber die Aussage des Satzes, angeben, sodass klar ist, welches Resultat Sie verwenden möchten.
- Bei Fragen zu diesem Übungszettel, wenden Sie sich bitte an Ihren Tutor, oder an den Assistenten (schreied@math.uni-bonn.de).
- Die neuen Übungsblätter können immer Freitags ab spätestens 12 Uhr von der Homepage der Vorlesung heruntergeladen werden: `http://www.math.uni-bonn.de/ag/la2016/LA1.htmpl`
- Lösungen zu den Übungszettel müssen Freitags **vor der Vorlesung**, d.h. 10:00 – 10:15 Uhr, eingereicht werden.

  Die Teilnehmer der Tutorien 5, 6, 7 und 8 werden gebeten, die Übungszettel direkt bei Ihrem Tutor während des Freitags Tutoriums von 8:00-10:00 Uhr abzugeben.
- Die korrigierten Übungszettel bekommen Sie in Ihrem Tutorium zurück; dort werden auch die Lösungen zu den Aufgaben besprochen.
- Für die Zulassung zur Klausur sind **mindestens 50%** der Übungspunkte erforderlich.
- Es wird ein **Help Desk** für Fragem zur Vorlesung und den Übungen angeboten. Dort steht Ihnen Montags 15:00–18:00 sowie Donnerstags 14:00–17:00 Uhr jeweils im Raum N1.002 (Endenicher Allee 60, Nebengebäude) ein Student eines höheren Semesters für Fragen zur Verfügung.
- Mehr Details finden Sie auf der oben genannten Homepage der Vorlesung.