Prof. Dr. Catharina Stroppel
Dr. Stefan Schreieder

Wintersemester 2016/17

Übungsblatt 10
Lineare Algebra 1

Aufgabe 1. (4 Punkte)
Betrachte die $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (2x - y, 4y + x) \quad \text{und} \quad \mathrm{id} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (x, y),$$

sowie die geordneten Basen

$$\mathcal{B}_1 := ((1, 0), (0, 1)) \quad \text{und} \quad \mathcal{B}_2 := ((1, 1), (2, -2)).$$

Berechne die folgenden Matrizen:

(a) $M_{\mathrm{id},\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$;

(b) $M_{\mathrm{id},\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}$;

(c) $M_{f,\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1}$;

(d) $M_{f,\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_2}$.

Aufgabe 2. (4 Punkte)
Sei K ein Körper. Man zeige, dass die Abbildung

$$f : K \longrightarrow K^{2\times 2}, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

injektiv ist und für $x, y \in K$, die Beziehung $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ gilt.

Aufgabe 3. (4 Punkte)
Sei K ein Körper und sei $f : V \longrightarrow W$ eine K-lineare Abbildung zwischen endlich dimensionalen K-Vektorräumen V und W. Zeige, dass es geordnete Basen $\mathcal{B}_V$ von V und $\mathcal{B}_W$ von W gibt, sodass

$$M_{f,\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_W} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei $r = \dim(\mathrm{im}(f))$ den Rang von f bezeichne, $\mathbb{1}_r \in K^{r\times r}$ die $r \times r$ Einheitsmatrix ist, und 0 jeweils die geeignete Nullmatrix bezeichne.

Bitte wenden.

Abgabe ist am **Freitag 13. Januar 2017**, vor (!) der Vorlesung, d.h. 10:00 – 10:15 Uhr.

Aufgabe 4. (4 Punkte)
Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum von endlicher Dimension $n = \dim_K(V)$. Sei weiterhin $f : V \longrightarrow V$ eine K-linear Abbildung und $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis von V mit

$$M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne die Dimension $\dim_K(\ker(f))$ des Kerns von f.

(b) Berechne die Dimension $\dim_K(\operatorname{im}(f))$ des Bildes von f.

(c) Zeige, dass $f^{\circ k} := f \circ \cdots \circ f = 0$ für alle $k \geq n$.

Allgemeine Bemerkungen:

- **Wichtig:** Die Abgabe ist ab jetzt auch in Gruppen von zwei oder drei Personen erlaubt; allerdings muss ersichtlich sein, dass jedes Mitglied der Gruppe die Lösung von mindestens einer Aufgabe aufgeschrieben hat. Bitte vergessen Sie dabei nicht den **Name und die Nummer des Tutoriums** von jedem Gruppenmitglied auf dem abgegebenen Blatt anzugeben, sodass die Punkte aller Mitglieder richtig eingetragen werden können.
- Wenn nicht explizit ausgeschlossen, dürfen Sie Sätze und Resultate aus der Vorlesung ohne Beweis verwenden, müssen aber dabei immer die Nummer oder den Namen des Satzes, oder aber die Aussage des Satzes, angeben, sodass klar ist, welches Resultat Sie verwenden möchten.
- Bei Fragen zu diesem Übungszettel, wenden Sie sich bitte an Ihren Tutor, oder an den Assistenten (schreied@math.uni-bonn.de).
- Die neuen Übungsblätter können immer Freitags ab spätestens 12 Uhr von der Homepage der Vorlesung heruntergeladen werden: `http://www.math.uni-bonn.de/ag/la2016/LA1.htmpl`
- Lösungen zu den Übungszettel müssen Freitags **vor der Vorlesung**, d.h. 10:00 – 10:15 Uhr, eingereicht werden.

  Die Teilnehmer der Tutorien 5, 6, 7 und 8 werden gebeten, die Übungszettel direkt bei Ihrem Tutor während des Freitags Tutoriums von 8:00-10:00 Uhr abzugeben.
- Die korrigierten Übungszettel bekommen Sie in Ihrem Tutorium zurück; dort werden auch die Lösungen zu den Aufgaben besprochen.
- Für die Zulassung zur Klausur sind **mindestens 50%** der Übungspunkte erforderlich.
- Es wird ein **Help Desk** für Fragem zur Vorlesung und den Übungen angeboten. Dort steht Ihnen Montags 15:00–18:00 sowie Donnerstags 14:00–17:00 Uhr jeweils im Raum N1.002 (Endenicher Allee 60, Nebengebäude) ein Student eines höheren Semesters für Fragen zur Verfügung.
- Mehr Details finden Sie auf der oben genannten Homepage der Vorlesung.