Prof. Dr. Catharina Stroppel
Dr. Stefan Schreieder

Wintersemester 2016/17

Anwesenheitsaufgaben für die Tutorien der 6. Woche
Lineare Algebra 1

Aufgabe 1. Betrachte die folgenden Körper K und K-Vektorräume $(V, +, \cdot)$, und entscheide jeweils ob die Teilmenge $M \subset V$ linear unabhängig ist und/oder ein Erzeugendensystem bildet.

(a) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, $M = \{(0, 0), (1, 0)\}$;

(b) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, $M = \{(1, 1), (1, 0)\}$;

(c) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $M = \{(1, 1, 1), (2, 2, 2)\}$;

(d) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $M = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 1, 1)\}$;

(e) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $M = \{(1, 1, 1), (2, 1, 2), (1, 0, 0), (4, 1, 4)\}$;

(f) $K = \mathbb{F}_2$, $V = (\mathbb{F}_2)^2$, $M = \{(0, 1), (1, 0)\}$;

(g) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{C}$, $M = \{8, 4 + 4i, 1\}$;

(h) $K = \mathbb{Q}$, $V = \mathbb{C}$, $M = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}i\}$.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper und $(V, +, \cdot)$ ein K-Vektorraum. Seien $a_1, a_2, b_1, b_2 \in K$ mit $a_1 b_2 \neq a_2 b_1$. Zeige: Falls $v_1, v_2, \ldots, v_n$ mit $v_i \in V$ linear unabhängig sind, so ist auch

$$a_1 v_1 + b_1 v_2,\ a_2 v_1 + b_2 v_2,\ v_3,\ v_4,\ \ldots,\ v_n$$

linear unabhängig.

Aufgabe 3. Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $(\mathrm{Pol}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$ aller polynomialen Abbildungen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, welcher in Aufgabe 3(b) auf Übungsblatt 5 besprochen wurde.

(a) Für eine polynomiale Abbildung $f \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bezeichnen wir mit $\deg(f)$ den Grad von f, d.h. die natürliche Zahl d, sodass es reelle Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_d$ mit $a_d \neq 0$ und folgender Eigenschaft gibt:

$$f(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \cdots + a_0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Zeige, dass $\deg(f) \in \mathbb{N}$ wohldefiniert ist, d.h. dass $d = \deg(f)$ eindeutig durch $f \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bestimmt ist. (Hinweis: Man darf ohne Beweis verwenden, dass ein Polynom $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ mit $a_n \neq 0$ nur endlich viele Nullstellen besitzt.)

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl und sei

$$\{f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n\} \subset \mathrm{Pol}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

eine linear unabhängige Teilmenge. Zeige, dass es einen Index $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ gibt, sodass $\deg(f_i) \geq n$.

Aufgabe 4. Sei $\mathbb{F}$ ein endlicher Körper und $(V, +, \cdot)$ ein endlich erzeugbarer $\mathbb{F}$-Vektorraum. Zeige, dass V endlich ist. Wie viele Elemente hat V?