Arbeitsgemeinschaft über „Veränderungen und Auflösen von Singularitäten nach de Jong“

Ziel des Treffens soll sein, den

Satz (de Jong): Sei X eine Varietät (d. h. ein separiertes, ganzes Schema von endlichem Typ) über einem Körper k, $Z \subset X$ eine echte abgeschlossene Teilmenge, dann gibt es eine Veränderung $f : X' \to X$ (d. h. einen dominanten, eigentlichen Morphismus mit $dim(X') = dim(X)$) und eine offene Einbettung $j : X' \hookrightarrow \overline{X}'$, so daß:

- $\overline{X}'$ eine projektive, reguläre Varietät und
- $j'(f^{-1}(Z)) \cup \overline{X}' - X'$ ein Divisor mit strikt normalen Überkreuzungen ist.

über das Auflösen von Singularitäten in beliebiger Charakteristik zu verstehen, zu beweisen und hoffentlich Anwendungen und Verallgemeinerungen kennenzulernen.

Zu diesem Satz gibt es einige schöne Artikel: Einen kurzen Überblick von Oort im Bulletin der AMS, die Orginalarbeit von de Jong ([de Jong]), die mir gut lesbar erscheint, einen Vortrag von Berthelot im Séminaire Bourbaki ([Berthelot]), in dem einige Anwendungen ausgeführt sind und die Ausarbeitung eines Seminars von Abramovitch und Oort, in der viele Argumente recht ausführlich beschrieben werden.

Für die Vorträge habe ich mir die folgende Aufteilung vorgestellt, bei der ich nur hoffen kann, keine allzu großen Probleme übersehen zu haben. Falls irgendetwas zu unsinnig, zu viel oder zu wenig beschrieben, zu lang oder zu kurz ist, bitte sagt Bescheid. Für den letzten Vortrag, über Anwendungen habe ich nur einen Vorschlag angegeben, jeder, der lieber eine andere Anwendung vorstellen möchte ist herzlich willkommen.

1. Vortrag: Einführung (etwa 60min) Hier sollte gesagt werden, was eine Auflösung von Singularitäten sein soll und die Resultate von Hironaka und de Jong angegeben und verglichen werden (Begriffe wie Veränderungen und Modifikationen klären, Konstruktivität der Resultate). Falls jemand kurz etwas zu Hironakas Arbeit sagen kann, wäre das natürlich sehr schön.

Dann eine kurze (!) Beweisskizze von de Jong's Resultat geben, was die Quellen jeweils auch tun, d. h. man muß hierfür nicht den ganzen Artikel lesen. (Induktion über $dim(X)$ / X so projezieren, daß die Fasern Kurven werden. / Modulraumtrick für einfache Doppelpunkte / dann die Basis auflösen / Schließlich die Doppelpunkte explizit entfernen.)

Zwei Bemerkungen zu Techniken, die schon vor de Jong's Arbeit bekannt waren, sollte man zur Motivation vielleicht angeben: 1. Artins Trick, Varietäten in Kurven zu fasern (wenn auch nur lokal), der in SGA IV viel benutzt wird. ("bon voisinages", leider blöd in SGA IV Band 3 Expose XI Ab.3, vielleicht in SGA 4 1/2 gucken, den ich gerade nicht finden kann.)

Wichtiger scheint mir noch das flach-machen-Lemma von Raynaud und Gruyson in der leichten Version von [Abr-Oort] 3.3 zu beweisen, weil da schon ein ähnlicher Trick - "wozu Modulräume alles gut sind" - benutzt wird. (Dabei vielleicht zum Hilberschema nicht viel sagen.)

2. Vortrag: Auflösen von Doppelpunkten (etwa 30 min) (dieser Vortrag könnte auch nach dem eigentlichen Beweis kommen, nur wegen der Mittagspause passt das so hoffentlich besser) Hier soll gezeigt werden, wie man die Singularitäten von Familien von Kurven mit einfachen Doppelpunkten explizit beschreiben und auflösen kann. ([de Jong, Abschnitt 3] oder [Abr-Oort] 3.4 & 4.11 oder [Berthelot] Abschitt 2, hierzu kann man auch in die Diplomarbeit von Michael Adam gucken (Abschnitt 2.2 & 3))

3. Vortrag: Eigentlicher Beweis (I) (etwa 40 min) In diesem Teil sollen die ersten einfachen Reduktionsschritte (k alg. abgeschlossen, X projektiv, normal, Z Divisor) angegeben werden (dazu muß man nur wissen was Aufblasen ist und das hat Vortrag 2 schon benutzt). Dann soll noch eine Faserung von $X \to X_{d-1}$ produziert werden, die folgende Eigenschqften hat: 1. eindimensionale zusammenhängende Fasern, wenigstens eine glatt, die glatten Punkte in allen Fasern dicht. 2. Z wird endlich und generisch étale über X_{d-1} und 3. sogar eine Vereinigung von Schnitten. ([Abr-Oort] 4.2/4.3/4.6, [deJong] 4.11 bis 4.16, [Berthelot] 4.2/4.3)

4. Vortrag: Eigentlicher Beweis (II) (etwa 60 min) Hier soll jetzt die Familie stabiler Kurven konstruiert werden und der Beweis damit beendet werden. ([deJong] 4.17 bis 4.21, [Berthelot] 3.2.2, [Abr-Oort] 4.6 bis 4.9 und 3.6 (Vorsicht, die Existenz einer universellen Kurve über dem groben Modulraum braucht man glaube ich nicht, sondern nur die Existenz eines feinen Modulraums mit Niveaustrukur und eine universelle Kurve über dem Stack, die auch kein Schema sein muß.)) Hier muß nun wohl ein wenig über die Modulräume $({}_l\overline{M}_{g,n})$ gesagt werden. Ich glaube aber, es genügt, die Existenz und ihre Eigenschaften kurz anzugeben, um den Beweis von de Jong zu verstehen. (Das Problem mit den Stacks - so die denn verwendet werden wollen - würde ich gerne so lösen, daß man nur sagt etwas zu definieren, s. d. eine Kurve $C \to X$ das selbe ist, wie ein Morphismus $X \to M_{g,n}$. Über diesem Raum gibt es dann (wenn man das genauer macht) per Definition eine universelle Kurve $\mathbf{C}$, von der man außerdem weiß, daß das Faserprodukt $X \times_{M_{g,n}} \mathbf{C}$ genau die Kurve C ist. (bitte diese Bemerkung ignorieren, falls sie überfluessig erscheint, oder fragen, falls sie zu kraus ist)) Wenn vorab gewünscht wird, könnte auch ein extra Vortrag über die Modulräume vergeben werden, was aber wohl auf Kosten der Anwendungen gehen würde, die dann nur sehr kurz behandelt werden können.

5. Vortrag: Anwendungen und Erweiterungen (60min) Dieser Vortrag kann ganz nach Willkür des Vortragenden gestaltet werden, je nach dem, was (zum Beispiel aus Berthelots Artikel) gefällt.

Ich würde vorschlagen, das Theorem über Familien anzugeben und dann eine Anwendung, z.B. die Positivität der Eulercharakteristik (s. [Berthelot]), zu beweisen, was vielleicht ganz gut zu den AG's über Schnittheorie passen würde.

Falls sich jemand findet, der statt dessen z.B. etwas über die C_{st}, etc. Vermutungen erzählen kann, wäre das natürlich auch toll...

Wenn mich jemand überzeugen will, daß noch Zeit für mehr übrig ist, kann dieser Vortrag auch geteilt werde, so dass dann erst jemand das Theorem über Familien erklärt und ein anderer eine Anwendung.

Literatur

[deJong] J. A. de Jong *Smoothness, Semi-stability and Alterations*; Publ. Math. IHES 83 (1996) S. 51-93

[Abr-Oort] D. Abramovitch und F. Oort *Alterations and resolution of singularities* Auf dem MSRI-Preprint-Server http://xxx.uni-augsburg.de unter math/9806100

[Berthelot] Berthelot *Alterations de varietes algebriques [d'apres de Jong]* Sem. Bourb. 1995-96 Exp.815 (Asterisque 241) S. 273-311

[Oort] F. Oort *Alterations can remove singularities*; Bull.Amer.Soc. 35 (1998) S.319-331 auch unter http://www.ams.org/journals/

[Adam] Michael Adam, Diplomarbeit (Bonn, 1998), e-mail: mad@math.uni-bonn.de