AG Beweis der Weil–Vermutung nach Laumon

13. Juli 2002, Bonn

Diesmal wollen wir uns einen Beweis der Weil-Vermutung über die Eigenwerte des Frobenius ansehen. Genauer soll es um den Beweis des Hauptsatzes aus Deligne: La conjecture de Weil II [Del2] gehen, den Laumon mit Hilfe der Fourier-Transformation vereinfachen konnte.

Zum einen ist diese Vermutung von Weil ein Analogon zur Riemann–Vermutung für Varietäten über endlichen Körpern.

Zum anderen gibt der Satz zum Beispiel die Möglichkeit, die Kohomologie einer Varität X über einem endlichen Körper $\mathbb{F}_q$ aus der Anzahl der Punkte $X(\mathbb{F}_{q^n})$ für alle n zu berechnen. Daran ist erstaunlich, daß man so auch einen Zusammenhang zwischen topologischen Eigenschaften von algebraischen Varietäten über $\mathbb{C}$ und Anzahlen von Punkten ihrer Reduktionen zu endlichen Körpern erhält — und man diese Methode für manche Modulräume tatsächlich benutzen kann, um die Kohomologie zu berechnen.

Zu allem Überfluß hat der Satz aus Weil II auch noch den Vorteil, daß er einen prima Ersatz für die Hodge–Zerlegung der Kohomologie von algebraischen Varietäten liefert.

Wir folgen im wesentlichen dem ersten Kapitel aus dem Buch von Kiehl und Weissauer [KW], allerdings sind die Originalquellen –größtenteils– SEHR schön, insbesondere sei als Vorgeschmack die Einleitung aus Delignes erstem Artikel über die Weil–Vermutung [Del1] empfohlen — die könnte bestenfalls dazu führen daß man noch weiter in [Del1] liest, was wiederum mein schechtes Gewissen trösten könnte, daß ich nicht diesen Artikel als Thema vorgeschlagen habe.

1. Vortrag: Die Weil–Vermutung und Delignes Satz. (55 min)

Hier soll eine Einführung gegeben werden, mit dem Ziel Delignes Satz zu formulieren und zu erklären, was der mit der ursprünglichen Weil–Vermutung zu tun hat. Dazu muß man auch etwas darüber sagen, was wir über étale Kohomologie glauben wollen.

Da das ziemlich viel Auslese erfordert, unten noch eine detaillierte Beschreibung. Als Quelle sei in erster Linie das erwähnte 1. Kapitel aus [Del1] genannt. Eine schnelle Einführung zu l-adischen Garben gibt es am Beginn von [Katz].

- Die ζ–Funktion eines Schemas über $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{F}_q$. ([Del1] 1.1). Erste Variante der Weil–Vermutungen: Für eine glatte Kurve ist die ζ-Funktion rational in $t := q^{-s}$, ihre Nullstellen haben den $Re(s) = \frac{1}{2}$ und die Polstellen liegen bei $s = 0$ und $s = 1$.

- Es gibt étale Kohomologiegruppen $H^i(X, \mathbb{Q}_l), H^i_c(X, \mathbb{Q}_l)$ für Varietäten über $\mathbb{F}_q$, die alle üblichen Eigenschaften haben (bitte keine davon anschreiben). Insbesondere bekommt man für den Frobenius–Endomorphismus auf X (den definieren!) die Grothendieck–Lefschetz Spurformel.

Genauso bekommt man: Produkt–Darstellung der ζ–Funktion.([Del1] 1.5.4)

- Die Weil–Vermutung: Die Eigenwerte des Frobenius auf der Kohomologie haben Absolutbetrag $q^{i/2}$. ([Del1] 1.7).
- Beispiele: 1. Kohomologie von $\mathbb{P}^n$. Hier kann man den Spaß machen, die Kohomologie durch das Zählen von Punkten zu bestimmen. (Formal benötigt man das Argument (1.7) $\Rightarrow$ (1.6) , daß sich in der Zetafunktion kein Nenner gegen einen Zähler wegkürzen kann) 2. Es wäre schön, die (Hasse)–Weil Abschätzung für die Anzahl der Punkte auf (elliptischen) Kurven über $\mathbb{F}_p$ anzugeben ($|\#E(\mathbb{F}_q) - 1 - q| \leq 2\sqrt{q}$, bzw. $< 2g\sqrt{q}$ s. z.B. Hartshorne Ex. 4.16).
- Um das mit Delignes Satz in Zusammenhang zu bringen soll das Herunterschrauben des Problems auf den Fall einer Kurve grob skizziert werden (s. z.B. [Del2] 3.3.1, oder [KW] I.7 erstmal für konstante Koeffizienten): Nimm an, dass wir eine glatte Faserung $X \to X_{d-1}$ mit eindimensionalen Fasern hätten. Dann könnten wir die Leray-Spektralsequenz und Induktion verwenden, allerdings müssen wir dann lokale Systeme auf X_{d-1} anschauen. (Es gibt solche Faserungen nicht wirklich, aber wenn man nur ein $\leq$ für die Eigenwerte beweisen will, kann man Noether–Induktion machen und am Ende wieder Poincaré–Dualität benutzen.) Das soll folgendes motivieren:
- Definition lokaler Systeme als Darstellung der Fundamentalgruppe. (Fundamentalgruppe kann man mit Überlagerungen definieren, und daher kommt das ganze étale Kohomologie Zeug. Darum brauchen wir uns also nicht zu kümmern.) ([Del2] Kap. 1.1 oder [Katz] S. 4-5)
- Daher auch die Definition von „Gewichten“ für lokale Systeme. ([Del2] Kap. 1.2 — ganzzahlig, Die Verallgemeinerung verwirrt eher)
- Das Ziel nennen[1]: **Théorème 2 (Deligne,[Del2])** Sei C eine glatte projektive Kurve, $U \subset C$ offen und dicht, F ein lokales System auf U, das rein vom Gewicht n ist. Dann ist $H^i(X, j_*\mathsf{F})$ rein vom Gewicht $n+i$.

Vortrag 2: Delignes obere Abschätzung der Gewichte (50 min.)

Hier soll die im 1. Vortrag recht kurz gekommene Definiton von l-adischen lokalen Systemen und deren Gewichten weiter erklärt werden und erste Einschränkungen an letztere gezeigt werden.

- Erweiterung des Begriffs: Die Weil–Gruppe und Weil–Garben. Twisten von Garben ([Del2],[Katz] wie zuvor).

[1] Nach der letzten AG könnten wir hier bemerken, daß $j_* = j_{!*}$ für Kurven, mit $j_{!*}$ würde sich der Satz verallgemeinern...Anm.d.Red.

- Beispiel (wir beweisen immer nur den Fall von Kurven! - auch wenn die Resulate allgemeiner richtig sind - meist wird das dann auf den Fall reduziert): Lokale Systeme vom Rang 1 $\Leftrightarrow$ Charaktere der Fundamentalgruppe. Die können wir mit Klassenkörpertheorie beschreiben. ([Del2] Thm 1.3.1 - 1.3.4.) Also sind solche immer rein.

- Deshalb (!) Def. „Gewichte der Determinanten“. Und wir haben Satz 1.3.13 über die Verträglichkeit mit Tensorprodukten und äußeren Potenzen.

  (Hierzu soll nur gesagt werden, daß man hier einen Satz braucht („Der Zariski-Abschluß der Bildes der geometrischen Fundamentalgruppe in $\mathsf{GL}_n(\mathbb{Q}_l)$ ist reduktiv“), für einen Beweis haben wir sicher nicht genug Zeit - furchtbar schwer ist der Satz nicht, es sei denn man hat – wie ich – Angst vor reduktiven Gruppen)

  Statt dessen wollen wir noch die obere Abschätzung für die Gewichte beweisen:

- Das Ergebnis für H^0 und H^2 ([Del2] 1.4)

- Die Abschätzung für H^1 – die Eigenwerte α des Frobenius erfüllen $|\alpha| \leq q^{n+2}$ was noch 1 zu viel ist ([Del2] 1.4.6, 1.8.1, 1.8.2, 1.8.10 - das entspricht [KW] 2.4 und 2.5, siehe auch 2.8).

Vortrag 3: Rankins Trick (50 min)

Mit Rankins Trick beweist Deligne den folgenden „unscheinbaren“ Satz: Aus (Gewichte der Determinante von Potenzen)+(Grothendieck-Spurformel)+(Konvergenz der L-Reihe) bekommen wir ein Kriterium für Reinheit: reell+irreduzibel $\Rightarrow$ rein (bzw. reell $\Rightarrow$ gemischt) ([Del2] 1.5.1 und 1.5.2., oder [KW])

Wir werden nur die Folgerung:

Folgerung: Sei F eine reine Garbe auf $X \xrightarrow{\pi} S$, so daß F und $\mathsf{F}^\vee$ faserweise nur in einem Grad i Kohomologie haben. ($\forall s \in S$ ist $H_c^j(X_s, \mathsf{F}|_{X_s}) = 0 = H_c^j(X_s, \mathsf{F}^\vee|_{X_s})$ falls $j \neq i$. Dann ist $R^i\pi_!\mathsf{F}$ gemischt.

verwenden. (Beweis s. [KW] S. 50 „Property c)“ (Reine Garben sind direkter Summand in der reellen $\mathsf{F} \oplus \mathsf{F}^\vee(b)$. Auch diese hat nur in einem Grad Kohomologie, also sagt uns die Lefschetz-Formel, daß die Kohomologie wieder reell ist, also gemischt.))

Zuvor muß man reelle Garben definieren (das charakteristische Polynom der Frobenii hat reelle Koeffizienten). Zum Eingewöhnen soll der Satz 2.16 aus [KW] –allerdings nur im Spezialfall $X \subset \mathbb{A}^1$ offen, und die Garbe G glatt und gemischt– gezeigt werden. (Wir brauchen den Satz später.)

Zu Beginn hiervon sollte man einen kleinen Exkurs machen: Wie in [KW] und [Lau] kann man einem lokalen System die Funktion „Spur des Frobenius auf den $\mathbb{F}_{q^n}$-Punkten“ zuordnen. Es gilt aber nach dem Satz von Tschebotarev, daß man ein irreduzibles (bzw. halbeinfaches) lokales System auch schon an der zugehörigen Funktion erkennt! Die Funktionen wissen also schon eine ganze

Menge über die Garbe. ([Lau] 1.1.2.1 - hier nur für lokale Systeme notiert). Diese Bemerkung wird insbesondere bei der Fourier-Transformation zumindest als Motivation verwendet und ist öfters nützlich. Wo wir schon die ganze Zeit von Gewichten sprechen – und wir in 2.16 die Funktionen benutzen –, scheint mir das erwähnenswert.

Vortrag 4: Fourier–Transformation[2] (50 min)

Zur Definition der Deligne–Fourier Transformation gibt es die Quellen [Lau] Abschnitt 1.2 und [KW] I.5:

Es gibt zu einem Charakter $\psi : (F_q, +) \to \mathbb{C}^*$ die Fourier-Transformation für Funktionen auf $\mathbb{F}_q = \mathbb{A}^1(\mathbb{F}_q)$. $f \mapsto \hat{f}(x) := \sum_{y \in \mathbb{F}_q} f(y)\psi(x-y)$. (das ist ja schon sehr ähnlich zur Fouriertransformation auf $\mathbb{R}$). Delignes Fourier-Transformation ist ein Analogon hierzu für Garben auf $\mathbb{A}^1$, bzw. allgemeiner ist diese auf Vektorbündeln über einem beliebigen Schema über $\mathbb{F}_q$ definiert.

Wir benötigen hier nur den Fall $\mathbb{A}^1$, und darum soll die Definition auch nur hierfür gegeben werden:

Kurz die Definition für Funktionen angeben. Definition der Artin-Schreier Überlagerung und Artin-Schreier Garbe $\mathcal{L}_\psi$ auf $\mathbb{A}^1$. Definition der Fourier-Transformation. Bemerke, daß das für die zugehörigen Funktionen die alte Definition gibt. Beispiel: $\mathcal{F}our(\mathbb{Q}_l) = i_{0,*}\mathbb{Q}_l(-1)[-1]$. Das Hauptresultat: Beweis der Inversions-Formel. (Um den Beweis aus [KW] oder [Lau] anzugeben, sollte man vielleicht auf seine Notationen achtgeben – z.B. ist $x+y$ vielleicht eine gute Notation für die Addition $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$, damit kann man dann die drei $\mathbb{A}^1$'se mittels x, y, z unterscheiden, Laumon schlägt vor, die dualen Variablen jeweils mit x', bzw. x'' zu bezeichnen, auch fein. Irgendwie sollte man klar machen, daß hier einfach der gewöhnliche Beweis in die Garbensprache übersetzt wird und dabei erstaunlicherweise keine grossen Probleme entstehen. Je nach Geschmack des Vortragenden kann man den Beweis von [Lau] 1.1.3.2 bzw. [KW] Lemma (5.20) gerne mit dem Tschebotarev-Argument (aus dem 2. Vortrag s. [Lau]) erschlagen, oder eben anderswie sagen, daß das einfach ist.)

Schließlich benötigen wir noch die Plancherel–Formel ([Lau] 1.2.2.8 und [KW] 5.7), die soll man nicht beweisen — (Leider benötigen wir diese mehr als die Inversionsformel, aber der Beweis ist auch nicht schwer, nur unübersichtlicher) — wir benötigen später auch (nur) die Formulierung aus [KW]. (Trotzdem gut zu wissen, daß man auch diese Formel in Garben-Sprache übersetzen kann und die Argumente aus [Lau] so ähnlich wie beim Beweis der Inversions-Formel sind.)

Statt Beweis auf jeden Fall das einfachste Beispiel berechnen: Berechne $H_c^\bullet(\mathbb{A}^1, \mathcal{F}our(\mathsf{F}))$ in Termen von F $(H^\bullet(\mathbb{A}^1, \mathcal{F}our(\mathsf{F}) \otimes \mathbb{Q}_l) = H^\bullet(\mathbb{A}^1, \mathsf{F} \otimes i_{0,*}\mathbb{Q}_l)()[]$, den Twist $()[]$ mag der Vortragende herausfinden)

Am schönsten wäre es, wenn jetzt noch 2 Minuten übrig wären, um zu erwähnen, daß die Fourier-Transformation auch noch mit der Dualität vertauscht (das

[2]Hier wird plötzlich etwas für Garben auf $\mathbb{A}^1$ gemacht, was leider etwas unvermittelt passiert, da erst im nächsten Vortrag gesagt wird, wie man sich auf den Fall, daß die Kurve $C = \mathbb{A}^1$ ist reduzieren kann. Entschuldigung.

kommt von dem erstaunlichen Satz, daß es egal ist, ob man die Fourier-Transformation mit $\mathbb{R}\pi_!$ oder mit $\mathbb{R}\pi_*$ definiert). Wir brauchen das im folgenden nicht, aber man muß es doch erwähnen - jetzt steht es schon im Programm, drum kann man es doch auch weglassen.

Vortrag 5: Zusammensetzen der Vorarbeiten zu Laumons Beweis der Weil–Vermutung. (30 min)

In diesem Vortrag soll der Beweis der Weil–Vermutung aus Kapitel I.6 aus [KW] erklärt werden. Einiges haben wir zwar schon gesehen, aber der Übersicht halber darf man lieber wiederholen.

1. Für i=0 ist der Satz einfach. Poincaré–Dualität gibt dann auch i=2.

2. Für i=1 kann man das Dualitäts–Lemma [KW] I.6.1 aus SGA $4\frac{1}{2}$ benutzen, um zu zeigen, daß es genügt, die Abschätzung $|\alpha| \leq q^{1/2}$ zu beweisen. (Der Beweis davon ist eigentlich nicht besonders verwickelt, im Wesentlichen folgt das aus der Dualität von Invarianten und Koinvarianten für die Verzweigungsgruppe, die ungefähr $\widehat{\mathbb{Z}}$ ist. Wir werden hierfür wohl nicht genügend Zeit haben.)

3. Es genügt, den Fall $X = \mathbb{A}^1$ anzuschauen. Und wir können annehmen daß F geometrisch irreduzibel und unverzweigt bei ∞ ist (kurz! skizzieren).

4. Für geometrisch konstante Garben haben wir die Abschätzung fast schon gezeigt.

5. Für die übrigen Garben wollen wir den Funktionen-Fouriertransformationstrick (s. Einleitung von [KW]) benutzen. Dazu muss man zuvor bemerken, daß die Fouriertransformierte von F eine gemische Garbe ist, für die H^1_c verschwindet. (Das ist nach unserern Vorarbeiten ziemlich leicht. Eigenschaft b) haben wir gerade im einfachsten Beispiel für die Plancherel-Formel gesehen s. 4. Vortrag. Eigenschaft a) „Garbe“ wie in [KW] - wir haben uns absichtlich auf eine Situation reduziert, in der das gilt -, für Eigenschaft c) können wir sofort auf die Folgerung aus dem Rankin-Trick verweisen s. 3. Vortrag).

Literatur

[Del1] P. Deligne, *La conjecture de Weil I*, Publications Mathématiques IHES 43, 1974.

[Del2] P. Deligne, *La conjecture de Weil II*, Publications Mathématiques IHES 52, 1980.

[Lau] G. Laumon, *Transformation de Fourier constantes d'équations fonctionelles et conjecture de Weil*, Publications Mathématiques IHES 65, 1987.

[Katz] N. Katz, *L-functions and monodromy: Four lectures on Weil II*, auf der Homepage von N. Katz `http://www.math.princeton.edu/~nmk/`

[KW] R. Kiehl, R. Weissauer, *Weil Conjectures, Perverse Sheaves and l'adic Fourier Transform*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete; 3. Folge Bd 42, Springer Verlag 2001.