# Singuläre Homologie und Kohomologie von Varietäten

In dieser Arbeitsgemeinschaft soll der Artikel “Singular homology of abstract algebraic varieties” [SV] von Suslin und Voevodsky besprochen werden. Die Definition der singulären Kohomologie und Homologie für Varietäten ist durch den Satz von Dold und Thom aus der Topologie (vgl. 1. Vortrag) motiviert. Ziel dieses Treffens ist es, diese Gruppen mit etaler Kohomologie und für Varietäten über $\mathbb{C}$ auch mit der singulären Homologie für topologische Räume zu vergleichen. Dazu betrachtet man die von Voevodsky definierte qfh-Topologie, mit der man eine Verbindung zwischen algebraischen Zykeln und darstellbaren Garben herstellen kann.

Eine gute Übersicht ist in den Abschnitten 4 bis 10 des Artikels [Le] von Levine zu finden. Insbesondere würde ich denen, die nicht so vertraut mit Begriffen wie Situs oder Garbenkohomologie auf einem Situs sind, empfehlen, den Abschnitt 5 in [Le] zu lesen. Wie sich der Artikel in die weitere Theorie von Voevodsky, Suslin und Friedlander einbettet, kann man zum Beispiel in den Artikeln [Fr] und [Sus] nachlesen.

Folgende Vorträge sind zu vergeben:

**1.Vortrag: Einführung** (30 min.)

Hier sollte zunächst der Satz von Dold und Thom aus der Topologie in der Form von Theorem 8.2 in [SV] erläutert werden. Insbesondere sollten Begriffe wie co-/simpliziales Objekt in einer Kategorie und Homotopiegruppen von simplizialen Mengen/Gruppen etc. erläutert werden. (Dafür kann man z.B. in [M] nachschauen.) Danach sollte die durch diesen Satz motivierte Definition der singulären Homologie und Kohomologie von Schemata mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/n$ erläutert werden (siehe Einleitung und Abschnitt 7 von [SV]). Dann wäre es schön, wenn eine kurze Übersicht über den Artikel gegeben werden könnte.

**2.Vortrag: Singuläre Homologie von Kurven** (30 min.)

Hier soll die relative Picardgruppe eingeführt und in Termen dieser die singuläre Homologie von Kurven ausgedrückt werden (Abschnitt 2+3 in [SV]).

**3.Vortrag: Der Starrheitssatz** (60 min.)

Ziel dieses Vortages ist es, den Starrheitssatz (Theorem 4.4 in [SV]) mit Korollar (Theorem 4.5 in [SV]) zu beweisen. Zunächst führe man die h- und qfh-Topologie ein und beweise den Vergleichssatz (Kor. 10.10 in [SV], vgl. auch [Le] Abschnitt 6 und 9). Aus Zeitgründen würde ich vorschlagen, die Charakterisierung von h- und qfh-Morphismen ([SV] Cor. 10.4 bzw.

[Le] Theorem 6.2) ohne Beweis zu übernehmen. Danach bespreche man den 4. Abschnitt in [SV]. Mit den Resultaten aus [deJ], welche wir ja beim letzten mal besprochen haben, beweise man Theorem 4.5 gleich in beliebiger Charakteristik.

**4.Vortrag: qfh-Garben** (60 min.)
Erst zeige man, daß qfh-Garben Transfer besitzen (Abschnitt 5 in [SV]), und dann interpretiere man die freie qfh-Garbe $\mathbb{Z}_{qfh}(X)$ in Termen von endlichen Zykeln (Abschnitt 6 in [SV] bis Seite 81 oben). Auch wenn die Zeit es nicht zuläßt, viele Details zu bringen, ist es, glaube ich, immer gut möglich, die Grundideen zu erläutern.

**5.Vortrag: Singuläre Homologie und Kohomologie** (60 min.)
Zunächst identifiziere man die endlichen Zykeln mit dem unendlichen symetrischen Produkt (Abschnitt 6 ab Seite 81 oben in [SV]). Dann bespreche man den Abschnitt 7 mit dem Ziel, das Hauptresultat Korollar 7.8 zu beweisen. Auch hier betrachte man wieder eine Version in beliebiger Charakteristik. Schließlich wäre es schön, wenn man für Varietäten über $\mathbb{C}$ etwas über den Zusammenhang mit der singulären Kohomologie aus der Topologie sagen könnte (vgl. Abschnitt 7 in [SV]).

# Literatur


[deJ] DE JONG, J.A. : *Smoothness, Semi-stability and Alterations.* Publ. Math. IHES 83 (1996) S. 51-93.

[Fr] FRIEDLANDER, E.M.: *Motivic Complexes of Suslin and Voevodsky.* Séminaire Bourbaki, Vol. 1996/97, Astérisque No. 245, Exp. No. 833, 5, Seite 355–37

[Le] LEVINE, M.: *Homology of algebraic varieties: an introduction to the work of Suslin and Voevodsky.* Bulletin of the AMS Vol. 34 No. 3, Seite 293-312.

[M] MAY, P.: *Simplicial objects in algebraic topology.* Van Nostrand 1967.

[SV] SUSLIN, A.; VOEVODSKY, V.: *Singular homology of abstract algebric varieties.* Inv. math. 123, S. 61-94 (1996).

[Sus] SUSLIN, A.: *Algebraic K-Theory and Motivic Cohomology.* Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Zürich. Switzerland 1994.