Kleine AG

Springer-Korrespondenz

Sa., 9.10.2004, Bonn

Über einem algebraisch abgeschlossenen Körper ist jede unipotente Matrix in SL_n konjugiert zu ihrer im wesentlichen eindeutigen Jordan-Normalform. Diese ist bestimmt durch die Größe der Jordanblöcke. Wir erhalten daher eine Bijektion zwischen der Menge der Konjugationsklassen unipotenter Matrizen und der Menge der Partitionen von n. Diese entspricht wiederum (über Young-Tableaux) der Menge der irreduziblen Darstellungen der Weylgruppe $W = S_n$ von SL_n. Diese Korrespondenz ist ein besonders einfacher Fall der Springer-Korrespondenz, die den Konjugationsklassen unipotenter Elemente einer zusammenhängenden halbeinfachen algebraischen Gruppe G Darstellungen der Weylgruppe W von G zuordnet. Im Falle eines unipotenten Elementes von SL_n findet man die Darstellung in der Kohomologie der Varietät der Flaggen, die das Element respektiert.

Allgemeiner sei dazu B eine Boreluntergruppe von G und $\mathscr{B} = G/B$ die Varietät der Boreluntergruppen von G. Für ein unipotentes Element $u \in G(k)$ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper sei $\mathscr{B}_u$ die Untervarietät der Boreluntergruppen von G, die u enthalten. Springer zeigte nun unter gewissen Voraussetzungen an die Charakteristik des Grundkörpers k, daß es eine natürliche Operation der Weylgruppe auf der l-adischen Kohomologie $H^\nu(\mathscr{B}_u, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ gibt. Die Darstellungen im höchsten Grad der Kohomologie sind dann die sogenannten Springer-Darstellungen.

Wir werden uns im wesentlichen an das Kapitel über Springer-Darstellungen im Buch von Kiehl und Weissauer [KW] sowie einen Artikel von Shoji [Sh] halten.

1. Vortrag: Perverse Garben (40 min)
Die später benötigten Resultate aus der Schnittkohomologie sollen vorgestellt werden: Perverse Garben und Schnittkomplexe definieren, die Charakterisierung angeben. Als Beispiel die Berechnung des Schnittkomplexes mit Hilfe kleiner Auflösungen. Halb-kleine Abbildungen mit glatter Quelle produzieren auch perverse Garben – die beiden Begriffe sind gerade so gemacht, daß das stimmt. Dualität ist für diese Garben auch sichtbar.
Besonders spannend ist der Zerlegungssatz von Gabber, der angegeben werden soll. Für uns ist dieser Satz im Verlauf der Konstruktion praktisch, aber schlußendlich wird er formal nicht benötigt.
Quellen: [Sh], 3 und 4.4, der Originalartikel [GM] ist auch schön (der Zerlegungssatz ist dort noch nicht bekannt, den Begriff der „Perversität“ benötigen wir glücklicherweise auch nicht, wir nehmen immer die „mittlere“), einen Überblick findet man auch bei [Ki], genauer steht alles in [KW], die Standardreferenz (Astérisque 100) wird man nicht benötigen.

2. Vortrag: Grothendiecks gleichzeitige Auflösung von Singularitäten (50 min)
In diesem Vortrag werden Ergebnisse der Theorie der algebraischen Gruppen in Erinnerung gerufen und Grothendiecks gleichzeitige Auflösung der Singularitäten diskutiert. Dabei sollen alle benötigten Begriffe anhand des Beispiels GL_n erläutert werden.

- Definition der Flaggenvarietät $\mathscr{B}$ und von $\mathscr{B}_u$
- Die Bedingung an die Charakteristik des Körpers angeben, kurz erläutern, wo diese eingeht (sehr kurz halten, für GL_n kann die Charakteristik beliebig sein).

- Grothendiecks gleichzeitige Auflösung [KW], VI.8 definieren. Die Tatsache, daß das eine Auflösung der Singularitäten liefert, scheinen wir erstmal nicht zu benötigen. Also müssen nur die Eigenschaften der Abbildungen (glatt, eigentlich) erklärt werden.
- Das Beispiel GL_n sollte ausführlich diskutiert werden, die Abbildungen als Koeffizienten des charakteristischen Polynoms bzw. Eigenwerte beschreiben.
- Operation der Weylgruppe
- Definition und Charakterisierung regulärer Elemente in der Liealgebra eines maximalen Torus ([KW], VI.7), ohne Beweis.
- Auf einer offenen Menge bekommt man eine Galois-Überlagerung mit Gruppe W. Das kann man am Beispiel GL_n erklären, eigentlich sollte sogar Zeit für den Beweis im allgemeinen Fall sein.

3. Vortrag: Konstruktion der Darstellungen (60 min)

- Die Auflösung ist klein, über der Teilmenge der nilpotenten Elemente halbklein. Dazu die Dimensionsabschätzung von Steinberg zitieren. Für GL_n kann man das ausrechnen (die Kombinatorik dazu steht in [St], 5, sehr knapp auch in [La2] S.320). Damit bekommt man perverse Garben mit W-Operation Φ, Φ', Ψ auf den Liealgebren von G bzw. der unipotenten Varität von G. Die Operation auf Ψ erhält man durch Einschränkung der Operation auf Φ. Literatur: [KW], VI.10,11, [Sh], 1,4.
- Zerlegung nach Charakteren und für Ψ auch nach G-Bahnen ([KW], 12).
- Definition der klassischen Operation von W auf der Kohomologie der Flaggenvarietät und Vergleich mit der Operation, die man durch Einschränkung auf die Faser über 0 erhält. ([Sh], 5)
- Die Dimensionsabschätzung von Steinberg benötigt etwas mehr über algebraische Gruppen darum muß das nicht erklärt werden, falls noch Zeit ist, wäre es natürlich schön, am Ende etwas darüber zu erzählen ([Sh] 1, oder [St]).

4. Vortrag: Die Irreduzibilität der Darstellungen (60 min)
Für die Zerlegung von Ψ aus dem letzten Vortrag müssen wir noch zeigen, daß die Summanden irreduzibel sind. Dazu vergleichen wir Ψ mit der Fouriertransformierten von Φ'.

- Definition der Fouriertransformation, dies liefert eine Äquivalenz von Kategorien perverser Garben auf einem Vektorraum und seinem Dual ([Sh],V.16 oder [La]). Das kann man alles zitieren, vielleicht ist es gut darauf hinzuweisen, daß das einzige schwerere Resultat die Kompatibilität von Fouriertransformation und Verdier-Dualität ist.
- Ψ ist bis auf einen Twist die Fouriertransformierte von Φ' ([KW], Prop. VI.13.6). Damit ist die Irreduzibilität der Darstellungen ganz leicht.
- Vergleich der alten W-Operation auf Φ mit der durch die Fouriertransformation induzierten ([KW]VI.15.1[1]).

5. Vortrag: Anwendungen und ein explizites Beispiel (45 min)

- Direkte Folgerungen aus diesen Resultaten sind zum Beispiel: Die kohomologische Version der Springer–Korrespondenz ([KW], VI, Thm 1.1), Berechnung der Kohomologie von $\mathcal{N}$, Anzahl der unipotenten Elemente von $G(\mathbb{F}_q)$ ([KW],VI.15).

[1] Das sieht auf den ersten Blick sehr viel schwerer aus, als auf den zweiten.

- Für SL_n lassen sich die Darstellungen explizit mit denen, die man kennt, identifizieren ([HSp]; noch genauere Ergebnisse stehen in [HSh], 8.5, aber dafür wird die Zeit womöglich nicht ausreichen).
- Es wäre schön wenn noch Zeit für einen Ausblick bliebe, dazu kann man z.B. [Sh] und [KW] anschauen.

Literatur

[Ho] R. Hotta, On Springer's representations, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **28** (1981), 863-876

[HSh] R. Hotta, N. Shimomura, Math. Ann. **241** (1979) 193-208

[HSp] R. Hotta, T. A. Springer, A specialization theorem for certain Weyl group representations and an application to the Green polynomials of unitary groups, Invent. Math. **41** (1977), 113-127

[KW] R. Kiehl, R. Weissauer, Weil Conjectures, Perverse Sheaves and l'adic Fourier Transform, Springer, 2000

[Ki] F. Kirwan, An introduction to intersection homology theory, Pitman Research Notes in Mathematics Series, 187

[La] G. Laumon, Transformation de Fourier, constantes d'équations fonctionnelles et conjecture de Weil, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **65** (1987), 131-210

[La2] G. Laumon, Correspondance de Langlands géométrique pour les corps de fonctions, Duke Math. J., **54**(2) (1987) 309–359

[Sh] T. Shoji, Geometry of orbits and Springer correspondence, Astérisque **168** (1988), 61-140

[St] R. Steinberg, On the Desingularization of the Unipotent Variety, Invent. Math **36** (1976) 209-224