Konstruktion semistabiler p-adischer Darstellungen

Programm für die kleine AG am 23.4.2005 in Bonn

Es seien K ein Körper der Charakteristik Null, der vollständig ist bezüglich einer diskreten Bewertung mit perfektem Restklassenkörper k der Charakteristik $p > 0$, und G_K die absolute Galoisgruppe von K.

Eine p-adische Galoisdarstellung ist ein endlicher $\mathbb{Q}_p$-Vektorraum V mit einem stetigen Homomorphismus $G_K \to \mathrm{GL}(V)$. Die Theorie dieser Darstellungen kann man als schwierig ansehen, weil man die Gruppe G_K, genauer ihre wilde Verzweigungsgruppe (die p-Sylowgruppe der Trägheitsgruppe) nicht gut kennt.

Nach Fontaine [Fo94b] ist allerdings die volle Unterkategorie der *semistabilen* p-adischen Galoisdarstellungen (Vortrag 2) äquivalent zu einer vollen Unterkategorie der filtrierten (φ, N)-Moduln, das sind vollkommen explizite Objekte der (semi-)linearen Algebra (Vortrag 1).

Lange Zeit war unklar, welche filtrierten (φ, N)-Moduln D von p-adischen Galoisdarstellungen kommen (diese D nennt man *zulässig*). Man kann leicht zeigen, daß die zulässigen D's eine bestimmte numerische Bedingung erfüllen (solche D nennt man *schwach zulässig*). Wir wollen uns mit einer Arbeit von Colmez und Fontaine [CF] beschäftigen, in der Fontaines Vermutung

schwach zulässig $\Rightarrow$ *zulässig*

bewiesen wird; mit anderen Worten gibt es für jeden schwach zulässigen filtrierten (φ, N)-Modul eine semistabile p-adische Galoisdarstellung.

Obwohl wir darauf in der AG nicht weiter eingehen können, sei hier bemerkt, daß filtrierte (φ, N)-Moduln als die (log) kristalline Kohomologie glatter, eigentlicher K-Varietäten mit semistabiler Reduktion auftreten; im Fall guter Reduktion ist das die kristalline Kohomologie und es gilt $N = 0$. Vergleichsätze zwischen etaler und kristalliner Kohomologie besagen, daß die p-adische etale Kohomologie solcher Varietäten semistabil ist und unter der genannten Äquivalenz der kristallinen Kohomologie entspricht (diese ist also zulässig).

Der Artikel [CF] ist sehr gut lesbar (wir empfehlen, beim ersten Lesen von der Einleitung gleich zu Abschnitt 3 zu springen). Einen schönen Überblick gibt auch das Review von Mark Kisin im MathSciNet. Über semistabile Darstellungen kann man sich ausführlich in [Fo94b] informieren.

1. Vortrag: Filtrierte (φ, N)-Moduln (50 Min)

Hier soll [CF], Abschnitt 3 möglichst vollständig dargestellt werden, insbesondere die Propositionen 3.4 und 3.6.

Es sei $K_0 = W(k)$ der maximale unverzweigte Unterkörper von K und σ sein Frobenius. Ein endlicher filtrierter (φ, N)-Modul ist ein endlichdimensionaler K_0-Vektorraum D mit einer bijektiven σ-linearen Abbildung $\varphi : D \to D$, einem linearen Endomorphismus N mit $N\varphi = p\varphi N$ und einer fallenden Filtrierung Fil^* von $D_K = D \otimes_{K_0} K$.

Man kann solchen D zwei ganzzahlige Invarianten zuordnen: Im eindimensionalen Fall sei $d \in D$ eine Basis und $\varphi(d) = \lambda d$, dann ist $t_N(D)$ die p-Bewertung von λ, und $t_H(D)$ ist der größte Index i mit $Fil^i D_K \neq 0$. Im allgemeinen Fall setzt man $t_H(D) = t_H(\det D)$ und $t_N(D) = t_N(\det D)$. Der Modul D heißt *schwach zulässig*, wenn für jeden unter φ und N

stabilen Unterraum $D' \subseteq D$ mit der induzierten Filtrierung $t_H(D') \leq t_N(D')$ gilt und $t_H(D) = t_N(D)$.

2. Vortrag: Semistabile Galoisdarstellungen (50 Min)

In diesem Vortrag sollen semistabile Galoisdarstellungen wie in Abschnitt 4 von [CF] eingeführt und die Propositionen 4.4 und 4.5 erklärt werden. Die Verfeinerung des Hauptsatzes durch Theorem 4.3 lassen wir weg; statt dessen wäre es schön, einen kurzen Beweis für *zulässig* $\Rightarrow$ *schwach zulässig* zu geben.

An diesem Punkt brauchen wir Fontaines Ringe $B_{cris} \subset B_{st} \subset B_{dR}$ und einige ihrer Eigenschaften. Wahrscheinlich wird die Zeit nicht erlauben, viel zur Konstruktion oder gar zu den Beweisen zu sagen (siehe dafür [Fo94a] oder Abschnitt 1 in [CF]). Im einzelnen benötigen wir folgendes:

B_{dR} ist der Quotientenkörper eines vollständigen diskreten Bewertungsrings, bei dem man die Potenzen des maximalen Ideals mit $Fil^i B_{dR}$ bezeichnet. Die Unterringe B_{st} und B_{cris} werden mit der induzierten Filtrierung ausgestattet; dann sind die Graduierungen der drei Ringe isomorph. Auf allen drei Ringen operiert G_K kompatibel mit den Invarianten $B_{cris}^{G_K} = B_{st}^{G_K} = K_0$ und $B_{dR}^{G_K} = K$. Der Frobenius von $K_0 = W(k)$ hat eine Fortsetzung zu einem Ringendomorphismus φ von B_{cris} und B_{st}, und es gibt eine Derivation $N : B_{st} \to B_{st}$ mit Kern B_{cris}. Dadurch wird B_{st} ein (unendlicher) filtrierter (φ, N)-Modul, wenn man als Filtrierung das Urbild von $Fil^* B_{dR}$ unter der kanonischen Abbildung $B_{st} \otimes_{K_0} K \to B_{dR}$ nimmt (diese ist injektiv). Die Frobenius-Invarianten $B_{cris}^{\varphi=1} = B_{st}^{\varphi=1, N=0}$ werden durch die exakte Sequenz filtrierter Moduln

$$0 \to \mathbb{Q}_p \to B_{cris}^{\varphi=1} \to B_{dR}/Fil^0 B_{dR} \to 0 \tag{1}$$

beschrieben (statt dR könnte man dort auch st oder $cris$ schreiben). Eine Rolle spielt auch das Element $t \in B_{cris}^{\times}$, welches das maximale Ideal von B_{dR} erzeugt. Es gilt $\varphi(t) = pt$, und G_K operiert auf $t \cdot \mathbb{Z}_p$ durch den zyklotomischen Charakter. Im nächsten Vortrag wird (beim Beweis von Proposition 5.1) verwendet, daß B_{st} ein Polynomring in einer Variablen über B_{cris} ist; diese Variable heißt $z = \log[\pi]$ und erfüllt $\varphi(z) = pz$ sowie $N(z) = 1$.

Jeder p-adischen Galoisdarstellung V wird durch

$$D_{st}(V) = (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{st})^{G_K} \tag{2}$$

ein endlicher filtrierter (φ, N)-Modul zugeordnet. Es ist $\dim V \geq \dim D_{st}(V)$, und bei Gleichheit heißt V semistabil. In diesem Fall kann man V aus $D_{st}(V)$ rekonstruieren, weil dann sogar $V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{st} = D_{st}(V) \otimes_{K_0} B_{st}$ gilt (siehe [Fo94b], Theorem 5.3.5 und Proposition 5.3.6). Da diese Gleichung im nächsten Vortrag gebraucht wird, sollte hier etwas dazu gesagt werden.

Weil die Kategorie der zulässigen D's unter äußeren Potenzen stabil ist, folgt *zulässig* $\Rightarrow$ *schwach zulässig* direkt aus Proposition 4.4 in [CF].

3. Vortrag: Der fundamentale Komplex (50 Min)

[CF], Abschnitt 5 (ohne 5.4).

Ein wesentliches Hilfsmittel im Beweis des Hauptsatzes ist der fundamentale Komplex eines endlichen filtrierten (φ, N)-Moduls D

$$V_{st}^0(D) \to V_{st}^1(D), \tag{3}$$

dessen Kern der (potentielle) inverse Funktor zu D_{st} ist. Seine Bedeutung liegt darin, daß die Abbildung (3) genau dann surjektiv ist, wenn D zulässig ist (Proposition 5.7).

4. Vortrag: Schwach zulässig $\Rightarrow$ zulässig (40 Min)

Hier wird der Hauptsatz bewiesen, [CF], Abschnitt 6.1. Seine Verbesserung durch Theorem 4.3 und dessen Korollar soll erwähnt, aber nicht bewiesen werden. Neben den Ergebnissen aus Vortrag 3 brauchen wir zwei Aussagen:

Erstens das Hauptlemma [CF], Proposition 2.1 oder genauer deren Korollar 2.6. In diesem Vortrag soll nur das Korollar formuliert und angewendet werden. Dabei spielt eine Untergruppe U von B_{cris} und ihre Eigenschaft $U = Fil^0 B_{cris}^{\varphi=p}$ eine Rolle, die wir hier als Definition von U nehmen können.

Zweitens wird als Induktionsanfang verwendet, daß man jeden einfachen (φ, N)-Modul mit einer Filtrierung versehen kann, durch die er zulässig wird (Proposition 6.2 in [CF]). Dafür wird in Abschnitt 6.2 ein direktes Argument gegeben, aber aus Zeitgründen wollen wir uns lieber auf die Bemerkung nach Proposition 6.2 stützen, daß man diese Filtrierung aus der Hodge-Filtrierung des Dieudonnémoduls einer geeigneten p-divisiblen Gruppe bekommt. Vielleicht fällt dem Vortragenden ein schnelles Argument ein, warum diese Filtrierung tatsächlich zulässig ist (die zugehörige Galoisdarstellung ist der rationale Tatemodul der p-divisiblen Gruppe).

5. Vortrag: Das Hauptlemma (60 Min)

In diesem Vortrag soll etwas zum Beweis von [CF], Proposition 2.1 und deren Korollar 2.6 gesagt werden.

Dabei wird verwendet, daß man für jede „p-gute“ Banachalgebra $\mathcal{A}$ über C (Komplettierung von $\bar{K}$) einen Ring $B_{cris}^{+}(\mathcal{A})$ konstruieren kann. Bislang hatten wir nur $\mathcal{A} = C$ betrachtet, aber jetzt brauchen wir auch den Fall, daß $\mathcal{A}$ die Komplettierung des algebraischen Abschlusses von $C\{T\}$ ist. Der Übergang zum algebraischen Abschluß ist nötig, weil $C\{T\}$ selbst nicht p-gut ist.

Wieder ist eine Untergruppe $U(\mathcal{A})$ von $B_{cris}^{+}(\mathcal{A})$ wichtig, die man jetzt anders als im Fall $\mathcal{A} = C$ hinschreiben muß. Gebraucht wird vor allem, daß U funktoriell in $\mathcal{A}$ ist; die genaue Konstruktion spielt eigentlich keine Rolle.

Es wird nicht möglich sein, alle Details genau zu erklären. Der Vortragende kann hier selbst eine Auswahl treffen.

LITERATUR

[Fo94a] J.-M. Fontaine, Le corps des périodes p-adiques. Périodes p-adiques, Astérisque No. 223 (1994), Exp. II, 59–111

[Fo94b] J. M. Fontaine, Représentations p-adiques semi-stables. Périodes p-adiques, Astérisque No. 223 (1994), Exp. III, 113–184

[CF] P. Colmez, J.-M. Fontaine, Construction des représentations p-adiques semi-stables. Invent. Math. **140** (2000), 1–43