Schnittkohomologie

4. Mai 2002, Köln

Das Thema dieses Workshops ist die Schnittkohomologie — eine Kohomologietheorie, die für singuläre Räume 'sinnvollere Werte' liefert als gewöhnliche Kohomologie; zum Beispiel erhält man so eine Poincaré-Dualität für singuläre Varietäten. Diese Theorie wurde Ende der siebziger Jahre von Goresky und MacPherson zunächst analog zur singulären Kohomologie im Kontext stratifizierter topologischer Räume entwickelt [GM1]. Nach Ideen von Verdier und Deligne läßt sich die Schittkohomologie auch als Garbenkohomologie definieren [GM2]. Dadurch kann man mit dieser Theorie im Kontext der algebraischen Geometrie und insbesondere auch in positiver Charakteristik arbeiten. Diese Methoden wurden von Beilinson, Bernstein und Deligne benutzt, um den Zerlegungssatz zu beweisen [BBD].

In den fünf Vorträgen werden wir grob gesprochen dieser Entwicklung folgen; sogar der Zerlegungssatz soll erwähnt werden, aber natürlich ohne Beweis, sondern mit einer netten Anwendung.

Zur Literatur: Die Originalartikel [GM1] und [GM2] von Goresky und MacPherson sind sehr gut lesbar, und wir greifen daher an den meisten Stellen auf sie zurück. Der Band [BBD] hingegen ist technisch sehr anspruchsvoll. Ein schöner Leitfaden ist das Buch [K] von Kirwan. Einige Beweise werden dort zwar ausgelassen, aber man kann einen guten Überblick bekommen. Weiterhin mag es sich lohnen, einen Blick in den von Borel herausgegebenen Band [B] und das Skript [A] von Arabia zu werfen.

1. Vortrag: Definition von Schnittkohomologie als singuläre Kohomologie (60 min)

- Problem: Poincaré-Dualität gilt nicht für singuläre Varietäten (Beispiel!).
- Ziel: Definition einer Kohomologietheorie, die für singuläre Varietäten schöne Eigenschaften, z.B. Poincaré-Dualität erfüllt, (siehe [GM1] Einleitung, [K] §1.1). (Man könnte auch eine größere Liste von schönen Eigenschaften machen, s. [K] §1.)
- Definition topologische Stratifizierung. ([GM1] oder [GM2], jeweils §1.1 oder [K] §3.3.1 + Kompatibilität mit Triangulierung), Beispiel, z.B. Regenschirm, kurz sagen, wie die guten Umgebungen hier aussehen ([K] §3.2.2) (die Whitney-Bedingungen verschweigen!)
- Der Kettenkomplex IC^p und die Definition von IH^p ([GM1] §1.3, oder [K] §3.4 (Vorsicht: lokal endliche Ketten sind für das Folgende praktischer, Goresky und MacPherson benutzen die gleich, Kirwan erst in §3.4.9). Ein bißchen mit der Transversalitäts-Bedingung herumrechnen (wieder ein Beispiel, Vergleich mit erwarteter Dimension von Schnitten)

Es wäre schön, hier zu bemerken, dass man also auch lokale Koeffizienten nehmen kann, wobei das lokale System nur über $X - X^{sing}$ definiert sein muß, weil das Innere von Simplizes immer dort liegt.)

- Beispiel von IH^p für eine isolierte Singularität ([K] §3.5.1).
- Wenn noch Zeit ist, sagen, dass man für Schnittkohomologie immer die Normalisierung nehmen kann. [K] §3.6.3 (dabei darf man verschweigen, wie man Normalisierung für topologische Mannigfaltigkeiten definiert, aber *normal* soll man schon erwähnen).

2. Vortrag: Schnittkohomologie als Garbenkohomologie (45 min)

- Definition der Garben IC^p
- Das sind welke Garben und deshalb berechnet die Garbenkohomologie des Komplexes wirklich IH^p ([GM2] §2.1, recht ausführlich in [K] §5.2, §5.3 (aber man sollte den allgemeinen Unsinn um Spektralsequenzen hinnehmen, wer das nicht kennt lernt hier lieber nur das Ergebnis)).
- Bemerken, dass man lokale Koeffizienten in lokalen Systemen über $X - X^{sing}$ nehmen kann.
- Lokale Berechnung von Schnittkohomologie. (Ausschneidung und Künneth kann man sicher einfach sagen.) ([K] §3.8 bzw. [GM2] §2.4) Also sind die Schnittkohomologiegruppen nicht homotopie-invariant (das erwartet man vielleicht sowieso nicht), aber (!) die Garben IC^p haben auf den Strata lokal konstante Kohomologie.

3. Vortrag: Delignes Konstruktion/Charakterisierung von IC^p (60 min)

- Anklebe-Eigenschaft ([GM2] 2.5) (das sollte ausführlich erklärt werden, aber wir glauben das zitierte Ergebnis von McCrory [29]).
- Daraus motiviert sich Delignes Konstruktion und die Charakterisierung von IC ([GM2] §3; hier sollten gleich die Axiome [AX2] mitgeliefert werden; deren Äquivalenz zu [AX1] steht in §4.3 Lemma 1. – Alternativ steht das in [A] Thm 2.2.2 aufgeschrieben.)
- Man könnte sagen, dass man mit Hilfe dieser Konstruktion auf die Wahl einer Stratifizierung verzichten kann. Aber keine Details bitte. Die Eindeutigkeitsaussage haben wir ja gerade nach Wahl einer Stratifizierung bewiesen und das soll genügen.

4. Vortrag: Verallgemeinerte Poincaré-Dualität (45 min)

- Poincaré-Dualität für Schnittkohomologie ist nach dem 3. Vortrag sehr leicht zu zeigen. (s. [GM2] 5.3, der *simple proof*, oder [A].)

- Man sollte aber auch die cup-Produkt-Paarung konstruieren. ([GM2] 5.2) Dafür benötigt man ein paar Eigenschaften des dualisierenden Komplexes und etwas allgemeinen Kram über die derivierte Kategorie von Garben. Es wäre schön hier ein paar Worte zu verlieren ([GM2] §1, zum dualisierenden Komplex z.B. [B] V §7)
- Als direkte Anwendung aus Vortrag 3 und den Eigenschaften von D_X bekommt man [GM2] §6.2: $IH^* = H^*$(kleine Auflösung der Singularitäten), wenn es eine solche gibt.

5. Vortrag: Der Zerlegungssatz (30 min)

Die meisten Anwendungen der Schnittkohomologie beruhen auf dem Zerlegungssatz (siehe [BBD]). Der Beweis dieses Satzes benutzt étale Kohomologie, insbesondere beweisen Beilinson, Bernstein und Deligne zunächst, dass der Komplex IC^* für eigentliche Varietäten *rein* ist und benutzen Delignes Satz [D]. Das zu erklären ist sicher nicht möglich, aber als Ausblick gibt es in [K] §6.5 eine schöne Formulierung des Satzes mit einer hübschen Anwendung.

Literatur

[A] A. Arabia, *Faisceaux pervers sur les variétés algébriques complexes*, Prépublication Paris 2001, http://www.math.jussieu.fr/~arabia/math/Pervers.pdf

[B] A. Borel et. al., *Intersection Cohomology*, Birkhäuser Progress in Mathematics Vol. 50, 1984.

[BBD] A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne, *Analyse et topologie sur les espaces singuliers I*, Astérisque 100, 1982.

[D] P. Deligne, *La conjecture de Weil II*, Publ. Math. IHES 52 (1980), 137–252.

[GM1] M. Goresky, R. MacPherson, *Intersection homology theory*, Topology 19 (1980), 135–162.

[GM2] M. Goresky, R. MacPherson, *Intersection Homology II*, Invent. Math. 72, 1 (1983), 77–129.

[K] F. Kirwan, *An introduction to intersection homology theory*, Pitman Research Notes in Mathematics, Longman 1988.