PROGRAMM ZUM WORKSHOP ÜBER REDUKTIVE GRUPPEN
am 28.4.01 in Köln

Dieser Workshop soll als eine Einführung in die Theorie der reduktiven Gruppen dienen. Er hat auch das Ziel, eine Reihe von Begriffen und Definitionen, die in der Literatur gebräuchlich sind, zu erläutern. Unser Hauptresultat wird die Klassifikation von reduktiven Gruppen mittels gewisser kombinatorischer Daten sein. Eine ganze Reihe von wichtigen Resultaten müssen wir dabei auf dem Weg vernachlässigen. Um dabei den zeitlichen Rahmen nicht zu sprengen, haben wir die Vorträge relativ detailliert beschrieben. Aus diesem Grund werden wir uns auch eher auf Beispiele, die (hoffentlich) der Illustration dienen, konzentrieren. Unsere Hauptquellen sind der Übersichtsartikel von Springer [Sp1] und sein etwas ausführlicheres Buch [Sp2].

Notationen: Im folgenden bezeichne k immer einen algebraisch abgeschlossenen Körper. Alle Varietäten sind reduziert und von endlichem Typ über k.

1. Vortrag: Algebraische Gruppen (60 Minuten)

In diesem Vortrag sollen die von uns benötigten Resultate über algebraische Gruppen bereit gestellt werden.

(1) Definiere eine lineare algebraische Gruppe G als affine Varietät über k mit Gruppenstruktur ([Sp1] 2.1.3). Beachte, dass G automatisch glatt ist (als Varietät enthält G einen regulären Punkt g, da für alle $h \in G$ die Translation um hg^{-1} den Punkt g auf h schickt, ist auch h regulär). Insbesondere gilt, dass G genau dann zusammenhängend ist, wenn G irreduzibel ist. Als Beispiele sollen GL_n, SL_n und Sp_{2n} betrachtet werden ([Sp1] 2.1.2). Zur Vereinfachung der Gestalt der parabolischen Untergruppen (siehe 2. Vortrag) definieren wir $Sp_{2n} = \{A \in GL_{2n} \mid {}^tASA = S\}$ mit $S = \begin{pmatrix} 0 & J \\ -J & 0 \end{pmatrix}$, wobei $J = (J_{ij})$ die $n \times n$-Matrix mit $J_{ij} = \delta_{i,n+1-j}$ ist.

(2) Zeige, dass jede Untergruppe einer linearen algebraischen Gruppe abgeschlossen ist ([Sp2] 2.2.5) und gebe die Existenz von Quotienten an ([Sp1] 2.5.1 ohne Beweis). Ferner sollte erwähnt werden, dass für einen Normalteiler $H \subset G$ der Quotient G/H wieder eine lineare algebraische Gruppe ist.

(3) Beschreibe die rechtsreguläre Darstellung (Beispiel [Sp1] 2.3.4) und beweise damit, falls genügend Zeit bleibt, die Jordanzerlegung eines Elements in einen unipotenten und einen halbeinfachen Anteil ([Sp2] 2.4.8 + Corollar). Es gilt außerdem, dass die Jordanzerlegung von $g \in G$ auch wie folgt bestimmt werden kann: Wähle eine treue Darstellung $\varphi\colon G \hookrightarrow GL_n$, und sei $\varphi(g) = us$ die Jordanzerlegung in GL_n. Dann gilt bereits $u = \varphi(g_u)$ und $s = \varphi(g_s)$ für Elemente $g_u, g_s \in G$, und $g = g_u g_s$ ist die Jordanzerlegung von g (für einen vollständigen Beweis siehe z.B. [Ch] Exp. 4, §4).

(4) Definiere den Begriff einer unipotenten Gruppe und skizziere kurz, dass unipotente Gruppen auflösbar sind ([Sp1] 3.1.3).

(5) Definiere diagonalisierbare Gruppen und Charaktergruppen und zeige, dass eine Gruppe G genau dann diagonalisierbar ist, wenn jede rationale (endlich-dimensionale) Darstellung $G \to GL(V)$ isomorph zu einer direkten Summe von Charakteren $\chi \in X^*(G)$ ist. In diesem Fall ist $X^*(G)$ eine endlich erzeugte abelsche Gruppe ohne p-Torsion, falls $p = \mathrm{char}(k) > 0$, und die Algebra $k[G]$ von G is isomorph zur Gruppenalgebra von $X^*(G)$ ([Sp2] 3.2.3 und 3.2.4). Betrachte als Beispiele die diagonalisierbaren Gruppen $G = \mathbf{G}_m$ und $G = \mu_n$ (die Gruppe der n-ten Einheitswurzeln). Ist G eine diagonalisierbare Gruppe und ist $G \to GL(V)$ eine rationale Darstellung, so heissen die $\chi \in X^*(G)$, welche in der Zerlegung von V in ein-dimensionale Darstellungen vorkommen, die *Gewichte von der Darstellung V von G*. Definiere einen algebraischen Torus als zusammenhängende diagonalisierbare Gruppe und zeige, dass jeder Torus isomorph zu einer Potenz der multiplikativen Gruppe ist ([Sp1] 3.2.2).

2. Vortrag: Reduktive Gruppen (75 Minuten)

Ziel dieses Vortrags ist es, reduktive Gruppen und parabolische Untergruppen zu definieren und ihre Struktur zu verstehen.

(1) Definiere die Begriffe einer parabolischen und einer Boreluntergruppe ([Sp1] 3.5.1).

(2) Beweise den Borelschen Fixpunktsatz und zeige, dass die Borels die minimalen parabolischen sind, und dass außerdem alle Boreluntergruppen zueinander konjugiert sind ([Sp2] 6.2.4 – 6.2.7, dabei sollten Prop. 6.2.5

und die benutzten Eigenschaften von G-Orbiten nur zitiert werden; alle anderen Beweise können je nach Zeit vorgeführt werden).

(3) Gebe die Borels und die parabolischen der GL_n und der Sp_{2n} (vgl. 1. Vortrag) an: In der GL_n sind die Boreluntergruppen gerade die Gruppen, welche konjugiert zu der Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen B sind; die parabolischen Untergruppen sind diejenigen, die konjugiert sind zu Untergruppen der Form

$$P_{n_1,\dots,n_k} = \begin{pmatrix} GL_{n_1} & & * \\ & GL_{n_2} & \\ 0 & & \cdots \\ & & & GL_{n_k} \end{pmatrix}.$$

Die Boreluntergruppen in Sp_{2n} sind konjugiert zu $B \cap Sp_{2n}$, und die parabolischen sind konjugiert zu $P_{n_1,\dots,n_k} \cap Sp_{2n}$ mit $n_i = n_{k+1-i}$. Beachte, dass dafür unsere Beschreibung der Sp_{2n} wichtig ist. Charakterisiere ferner die parabolischen Untergruppen der GL_n (bzw. der Sp_{2n}) als Stabilisatoren von Flaggen von k^n (bzw. von total isotropen Flaggen vom k^{2n}) (siehe z.B. [Sp1] 3.5.2). Folgere, dass $GL_n/P_{n_1,\dots,n_k}$ die Varietät der Flaggen $(0) \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{k-1} \subset V_k = k^n$ mit $\dim(V_i) = n_1 + \cdots + n_i$ beschreibt, insbesondere ist $GL_n/P_{1,n-1}$ gerade der $(n-1)$-dimensionale projektive Raum. Ferner sollte erwähnt werden, dass $Sp_{2n}/(P_{(n,n)} \cap Sp_{2n})$ die Varietät der maximal total isotropen Unterräume von k^{2n} beschreibt.

(4) Definiere den Rang einer linearen algebraischen Gruppe G und die Weylgruppe $W = N_G(T)/Z_G(T)$ eines maximalen Torus T von G. Wir wollen ohne Beweis benutzen, dass alle maximalen Tori zueinander konjugiert sind und dass die Weylgruppe endlich ist ([Sp1] 3.5.3). Berechne die Weylgruppen von GL_n und von Sp_{2n} bezüglich des Diagonaltorus ([Sp1] 3.5.4).

(5) Definiere halbeinfache bzw. reduktive Gruppen als zusammenhängende lineare algebraische Gruppen mit trivialem Radikal bzw. trivialem unipotenten Radikal. Dabei sollte ohne Beweis erwähnt werden, dass in reduktiven Gruppen G das Radikal ein Torus ist und als die Einskomponente des Zentrums von G beschrieben werden kann ([Sp2] 7.3.1). Zeige zum Schluss noch, dass GL_n reduktiv aber nicht halbeinfach ist und dass SL_n und Sp_{2n} halbeinfach sind. Die Reduktivität dieser Gruppen G kann man beispielsweise wie folgt einsehen. Sei $V = k^n$ für $G = GL_n$ oder $G = SL_n$, und sei $V = k^{2n}$ für $G = Sp_{2n}$. G operiert kanonisch auf V. Das unipotente Radikal $R_u(G)$ ist unipotent, also existiert nach dem Borelschen Fixpunktsatz ein $0 \neq v \in V$, so dass $rv = v$ für alle $r \in R_u(G)$. Aber $R_u(G)$ ist ein Normalteiler in G, also wird gv von $R_u(G)$ fest gelassen für alle $g \in G$. Daher operiert $R_u(G)$ trivial auf ganz $V \setminus \{0\}$, und dies zeigt $R_u(G) = (1)$.

3. Vortrag: Das Wurzeldatum einer reduktiven Gruppe (75 Minuten)

In diesem Vortrag soll es um das "Wurzeldatum" einer reduktiven Gruppe gehen. Dies ist im Wesentlichen ein kombinatorisches Objekt. Die Wichtigkeit dieses Begriffs liegt in der Aussage begründet, dass reduktive Gruppen bis auf Isomorphie durch ihre Wurzeldaten klassifiziert werden.

(1) Definiere die Lie-Algebra einer linearen algebraischen Gruppe G wie folgt: Wähle eine Einbettung $G \subset GL_n$ und setze

$$\mathrm{Lie}(G) = \{A \in M_n(k) \mid 1 + \varepsilon A \in G(k[\varepsilon])\}$$

wobei ε eine Unbestimmte mit $\varepsilon^2 = 0$ ist. Insbesondere gilt $\mathrm{Lie}(GL_n) = M_n(k)$, $\mathrm{Lie}(SL_n) = \{A \in M_n(k) \mid \mathrm{Tr}(A) = 0\}$ und $\mathrm{Lie}(Sp_{2n}) = \{A \in M_{2n}(k) \mid {}^tAS + SA = 0\}$ mit S wie im ersten Vortrag. Sei $H \subset G \subset GL_n$ eine Untergruppe von G. Definiere die adjungierte Darstellung von H auf $\mathrm{Lie}(G)$ durch $(h, A) \mapsto hAh^{-1}$ für $h \in H$ und $A \in \mathrm{Lie}(G)$. Eine andere (weniger explizite) Beschreibung ist die von $\mathrm{Lie}(G)$ als Tangentialraum von G in 1. Aufgrund einer der Standardbeschreibungen des Tangentialraums einer Varietät in einem Punkt stimmt diese Definition mit der obigen überein. Insbesondere ist die obige Beschreibung unabhängig von der Wahl der Einbettung $G \hookrightarrow GL_n$.

(2) Sei G eine reduktive Gruppe, und sei $T \subset G$ ein maximaler Torus. Definiere das Wurzeldatum $\Psi(G,T) = (X, R, X^\vee, R^\vee)$ von (G,T) ([Sp1] 4.1.2, man beachte, dass aus der Reduktivität von G folgt, dass man $R = \tilde{R}$ hat ([Sp2] 8.1.2), d.h. R ist einfach die Menge der von Null verschiedenen Gewichte von T bezüglich der adjungierten Operation auf $\mathrm{Lie}(G)$) und die Operation der Weylgruppe W auf $\Psi(G,T)$. Lemma 1 von [Sp1] 4.1.2 sollte nur zitiert werden - in fast allen konkreten Fällen ist klar, was die duale Wurzel zu einer gegebenen Wurzel ist.

(3) Definiere ein abstraktes reduziertes Wurzeldatum ([Sp1] 4.2.1) (reduziert bedeutet, dass $\mathbf{Q}\alpha \cap R = \{\pm\alpha\}$ für jede Wurzel α, siehe [Sp1] 4.2.2). Von nun an seien alle Wurzeldaten als reduziert vorausgesetzt. Dies ist in [Sp1] und [Sp2] vergessen worden.

(4) Betrachte als Beispiele für Wurzeldaten und ihre Weylgruppe die Fälle $G = GL_n$, $G = SL_n$ und $G = Sp_{2n}$ jeweils bezüglich des Diagonaltorus ([Sp1] 4.2.4).

(5) Klassifikation reduktiver Gruppen durch ihre Wurzeldaten: Es geht um den folgenden Satz. Für jeden algebraisch abgeschlossenen Körper k liefert die Konstruktion in (2) eine Bijektion zwischen der Menge der Isomorphieklassen reduktiver Gruppen über k und der Menge der Isomorphieklassen von reduzierten Wurzeldaten ([Sp1] 4.4). Wenn Zeit bleibt, kann man vielleicht ein paar Worte zum Beweis verlieren ([Sp1] 4.4.2 und 4.4.3).

(6) Erläutere die Korrespondenz von Eigenschaften der reduktiven Gruppe G und Eigenschaften des korrespondierenden Wurzeldatums $(X, R, X^\vee, R^\vee)$ anhand einiger Beispiele, etwa: $\dim(G) = \mathrm{rk}_{\mathbf{Z}}(X) + \#R$ ([Sp2] 8.1.3); G ist abelsch $\iff$ G ist ein Torus $\iff$ $R = \emptyset$ ([Sp2] 8.1.8); G ist halbeinfach $\iff$ $G = (G, G)$ $\iff$ die von R in X erzeugte Gruppe hat endlichen Index in X ([Sp2] 8.1.9); bezeichnet G^{ss} die Menge der halbeinfachen Element von G, so gilt $G^{\mathrm{ss}}/(G\text{-Konjugation}) = (X^\vee \otimes_{\mathbf{Z}} k^\times)/W$ (jedes halbeinfache Element g von G ist konjugiert zu einem Element t eines fixierten maximalen Torus T; t ist eindeutig bestimmt bis auf Konjugation mit einem Element von $N_G(T)$, also gilt $G^{\mathrm{ss}}/(G\text{-Konjugation}) = T/N_G(T)$; ferner ist $X^\vee(T) \otimes k^\times \to T$, $\lambda \otimes x \mapsto \lambda(x)$ ein Isomorphismus).

4. Vortrag: Klassifikation reduktiver Gruppen (60 Minuten)

Nachdem wir im letzten Vortrag die Klassifikation reduktiver Gruppen auf die Klassifikation von Wurzeldaten zurückgeführt haben, soll es nun um eine Liste aller Wurzeldaten gehen.

(1) Definiere das Wurzelsystem (V, R), das zu einem Wurzeldatum $(X, R, X^\vee, R^\vee)$ assoziiert ist ([Sp1] 4.2.2). Es ist klar, dass die Klassifikation von Wurzeldaten aus zwei Teilen besteht: Die Beschreibung des assoziierten Wurzelsystems und die Beschreibung der endlich erzeugten abelschen Gruppe X/Q, wobei Q die von R erzeugte Untegruppe von X ist. Es bleiben also Wurzelsysteme zu klassifizieren. Gebe das Wurzelsystem von GL_n, von SL_n und von Sp_{2n} an.

(3) Beschreibe ein Wurzelsystem (V, R) durch sein Dynkindiagramm D und durch seine Cartanmatrix C. Definiere (V, R) als irreduzibel, falls D zusammenhängend ist. Sowohl Dynkindiagramm als auch Cartanmatrix bestimmen das Wurzelsystem bis auf Isomorphismus ([Sp1] 4.5.1 und [Bou] chap. 6, §4). Gebe die Dynkindiagramme und Cartanmatrizen von GL_n und Sp_{2n} an.

(4) Liste alle zusammenhängenden Dynkindiagramme auf ([Sp1] 4.5.2)und gebe Beispiele für die Typen A_n (GL_{n+1}, SL_{n+1}, PGL_{n+1}), B_n ($SO(V, q)$, wobei $V = k^{2n+1}$ und q die quadratische Form

$$(x_0, x_1, \ldots, x_{2n}) \mapsto x_0^2 + \sum_{i=1}^{n} x_{2i-1} x_{2i}$$

ist, siehe z.B. [KMRT] 25.10), C_n (Sp_{2n}) und D_n ($SO(V, q)$, wobei $V = k^{2n}$ und q hyperbolisch ist, siehe z.B. [KMRT] 25.12).

Bibliographie

[Bou] N. Bourbaki: *Groupes et Algèbres de Lie, chap. 4,5, et 6*, Masson (1981).

[Ch] C. Chevalley (Ed.): *Séminaire Chevalley: Classification des Groupes de Lie Algébriques*, ENS 1958.

[KMRT] M.-A. Knus, A. Merkurjev, M. Rost, J.-P. Tignol: *The Book of Involutions*, AMS Colloquium Publications **44** (1998).

[Sp1] T.A. Springer: *Linear Algebraic Groups*, in Encyclopaedia of Mathematical Sciences **55**, Algebraic Geometry IV (A.N. Parshin, I.R. Shafarevich (Eds.)), Springer (1994).

[Sp2] T.A. Springer: *Linear Algebraic Groups* 2nd edition, Progress in Mathematics **9**, Birkhäuser (1998).