Universität Bonn
Mathematisches Institut
Ulrich Görtz, Jakob Stix

Néron-Modelle

— Kleine AG am 28.01.2006 in Bonn —

Gegenstand des Workshops ist die Konstruktion von Néron Modellen abelscher Varietäten im lokalen Fall.

Ist R ein Dedekindring mit Quotientenkörper K, und ist ein (projektives) Schema X_K über K durch (homogene) Gleichungen gegeben, so kann man durch Umskalieren dafür sorgen, dass die Koeffizienten in R liegen: man erhält so ein (projektives) Modell X des Schemas über R. Die Reduktion der Gleichungen modulo einem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ von R liefert ein Schema $X_{\kappa(\mathfrak{m})}$ über dem entsprechenden Restklassenkörper. In der Regel wird man bei diesem naiven Prozess gute Eigenschaften des ursprünglichen Schemas verlieren. Insbesondere werden im allgemeinen in den Fasern über maximalen Idealen Singularitäten auftreten, selbst wenn man sich beim Umskalieren "geschickt anstellt". Es ist eine naheliegende Frage, wie das bestmögliche Modell aussieht, welches man erwarten kann. Die Existenz eines guten Modells hat Konsequenzen etwa für die Arithmetik der rationalen Punkte der Varietät.

Der Begriff des Néron-Modells liefert, durch eine andere Herangehensweise, gute Modelle für abelsche Varietäten (d.h. glatte, eigentliche Gruppenvarietäten) über K. Die wesentliche Néronsche Innovation dabei ist, dass ein Néron-Modell zwar glatt ist über R, aber dass nicht gefordert wird, dass das Modell wieder eigentlich ist. Stattdessen fordert man die sogenannte Néronsche Abbildungseigschaft: Ist Y ein glattes R-Schema, so setzt sich jeder Morphismus $Y_K \longrightarrow X_K$ fort zu einem Morphismus $Y \longrightarrow X$. Daraus folgt insbesondere, dass das Néron-Modell eindeutig bestimmt und ein Gruppenschema ist. Ist R ein diskreter Bewertungsring, und hat man ein glattes Gruppenschema über R, das die vorgegebene abelsche Varietät fortsetzt, so ist die Néronsche Abbildungseigenschaft äquivalent zu einer abgeschwächten Version des Bewertungskriteriums für Eigentlichkeit: man verlangt nur noch, dass das Bewertungskriterium für étale Erweiterungen von R gilt.

Die Theorie der Néron-Modelle wurde Anfang der 1960er Jahre von A. Néron begründet [Ne] und im Verlauf der 1960er Jahre von M. Raynaud weiterentwickelt [Ra]. Die ursprüngliche Néronsche Abhandlung ist leider schwer lesbar, da das Vorgehen sehr technisch ist und die Sprache Weils der aufkommenden Sprache der Schemata, die gerade für solche algebraisch-geometrischen Betrachtungen in einer relativen Situation viel besser geeignet ist, vorgezogen wurde. Mittlerweile gibt es lesbare Darstellungen durch M. Artin [Ar] (eher knapp und an einigen Stellen eher intuitiv) und das Buch [BLR] von S. Bosch, W. Lütkebohmert und M. Raynaud. Das Programm der AG orientiert sich an Artins Text; für weitere Details sollten die Vortragenden bei Bedarf auf [BLR] zurückgreifen.

In der AG konzentrieren wir uns auf die Konstruktion von Néron-Modellen abelscher Varietäten im strikt lokalen Fall, also über einem strikt henselschen, diskreten Bewertungsring R. Der globale Fall wird mit Abstiegsmethoden auf den lokalen Fall reduziert und bleibt jedem bei Interesse zum Selbststudium überlassen.

Komprimierte Inhaltsangabe: Wir definieren im ersten Vortrag den Begriff des Néron-Modells und diskutieren die Néronsche Abbildungseigenschaft.

Danach folgt die Konstruktion in mehreren Etappen. Die lokalen Ringe der Komponenten der speziellen Faser rät man als solche Komponenten maximalen Volumens bezüglich einer globalen invarianten Volumenform (ω-minimale Zariski–Primdivisoren). Der Néronsche Glättungsprozeß erlaubt zu sehen, dass es nur endlich viele Komponenten maximalen Volumens gibt. Damit haben wir birational einen Kandidaten von endlichem Typ über R. Auf dem Kandidaten finden wir ein R-birationales Gruppengesetz. Ein Resultat von Weil bzw. seine Weiterentwicklung von M. Artin konstruiert daraus eine Gruppe über R. Der Nachweis der Néron-Eigenschaft ist nun nicht mehr schwierig.

Im letzten Vortrag besprechen wir als Beispiel bzw. Anwendung Néron-Modelle elliptischer Kurven und knüpfen unter anderem eine Verbindung zur vorhergehenden AG über Modularität elliptischer Kurven.

1. Vortrag: Einführung (50 min.)
Quellen: [Ar] §1, [BLR] Kap. 1.2, Kap. 4.4, Kap. 7.1.

- Definition der Néron-Eigenschaft für glatte Varietäten: eindeutige Fortsetzung regulärer Abbildungen. Definition von Néron Modellen [Ar] (1.8), [BLR] 1.2, Def. 1.

- Reinheit des Unbestimmtheitsorts [Ar] (1.3), [BLR] Kap 4.4 Thm. 1. Der/die Vortragende sollte etwas ausführlicher erklären, als Artin dies tut, warum Artins Argumente mit Punkten tatsächlich schematheoretische Beweise liefern. Insbesondere der gleichzeitige Gebrauch von Punktnotation und generischer Punkte muß erklärt werden.

  Als Korollar erhalten wir, dass das Néron-Modell einer abelschen Varietät die stärkere Eigenschaft [Ar] (1.1) hat.

- Nérons Theorem [Ar] (1.2) und Raynauds Verallgemeinerung (nur die Aussage) [Ar] (1.9).

- Kriterium für Néron-Modelle durch ein "abgeschwächtes Bewertungskriterium" [Ar] (1.6), [BLR] 7.1, Thm. 1.

- Beispiele: multiplikative Gruppe [Ar] (1.7), abelsches R-Schema [Ar] (1.4), Aufblasung im Nullpunkt der speziellen Faser (bitte für ein glattes, surjektives R-Gruppenschema verallgemeinern; das Argument zeigt, dass man die generische Faser eines solchen zu einer Vektorgruppe degenerieren lassen kann) [Ar] (1.10).

2. Vortrag: R-birationale Gruppengesetze (50 min.)
Quellen: [Ar] §2, [BLR] Kap. 5, Kap. 2.5.

- Die Weil'sche Konstruktion eines Gruppenschemas aus einem birationalen Gruppengesetz über einem Körper mit der Verallgemeinerung auf R-birationale Gruppengesetze nach Artin [Ar] §2, [BLR] Kap. 5.

- Nach Bedarf sollte man etwas über den Begriff einer S-rationalen Abbildung sagen, siehe [BLR], 2.5.

- Der/die Vortragende sollte wiederum etwas ausführlicher erklären, als Artin dies tut, warum Artins Argumente mit Punkten tatsächlich schematheoretische Beweise liefern. Insbesondere soll hier betont werden, wo man mit geometrischen Punkten arbeiten darf und wo tatsächlich mit S-wertigen Punkten gearbeitet werden muß. Es soll klar werden, wo man braucht, daß die globalen Schnitte in jeder Faser dicht liegen.

3. Vortrag: Glättung (60 min.)
Quellen: [Ar] §3, §5, [BLR] Kap. 3.1, Kap. 3.3.

- Das Néronsche Singularitätsmaß [Ar] (3.8), [BLR] Kap 3.3. Beschreibung durch das erste interessante Fittingideal der Garbe der Differentiale (muss man selbst liefern, geht aber sofort und ist für diejenigen, die Fittingideale kennen, erhellend).

- Raynauds Lemma: generisches Vermindern des Singularitätsmaßes durch geeignetes Aufblasen [Ar] (3.9), [BLR] 3.3, Prop 5.

- Dafür braucht man die Kenntnis der étale lokalen Standardlage für über S glatte Paare $Y \hookrightarrow X$ [Ar] (3.10). Dieses Ergebnis sollte man vielleicht ohne Beweis benutzen; vergleiche die Ausführungen zu Beginn von Prop. 5 in [BLR] 3.3.

- Die ausreichende (und beweisbare) Desingularisierung: Glättung [Ar] (3.6), [BLR] Kap 3.1, Thm 3.

- Was man so über Zariski-Primdivisoren braucht, Realisierung als Divisoren nach iterierten Aufblasung mit generisch glattem Zentrum [Ar] §5. (Es scheint, dass man in Thm. (5.2) zusätzlich voraussetzen sollte, dass $\mathcal{O}$ exzellent ist, damit sichergestellt ist, dass im Fall $\dim \mathcal{O} = 1$ tatsächlich R' endlich ist über $\mathcal{O}$.)

4. Vortrag: Konstruktion im lokalen Fall (40 min.)
Quellen: [Ar] §3, [BLR] Kap. 1.3, Kap. 4.3.

- Reduktion auf Konstruktion der lokalen Ringe der generischen Punkte der speziellen Faser des Neron-Modells [Ar] (3.2), [BLR] 1.3.

- invariante Differentiale und Volumenformen [BLR] Kap 4.3 Prop 2.

- Es gibt nur endlich viele ω-minimale glatte Primdivisoren, Verhalten unter Aufblasung [Ar] (3.3) + (3.4).

5. Vortrag: Néron-Modelle elliptischer Kurven (40 min.)
Quellen: [Ar] §1.15, [BLR] Kap. 1.5, [Si] Kap. IV, [Liu], Kap. 10.2.

- Jede elliptische Kurve (über der generischen Faser eines Dedekindrings) hat ein minimales reguläres eigentliches Modell [Liu] 10, Prop. 1.8, [Si] IV Thm. 4.5 und die im Beweis zitierten Arbeiten. Zum Beweis kann man hier sicher nicht viel sagen. Stattdessen kann man vielleicht ein oder zwei Beispiele bringen und ein Wort zur Klassifikation der möglichen speziellen Fasern sagen [Liu] 10.1, [Si] IV Thm. 8.2.

- Erkläre die Beziehung zwischen dem Néron-Modell, dem minimalen eigentlichen regulären Modell, und dem durch eine minimale Weierstraßgleichung gegebenen Modell [Ar] (1.15), [Si] IV Thm. 6.1, Cor. 9.1, [BLR] 1.5, Prop. 1, [Liu] 10, Prop. 2.14. Vielleicht ist es sinnvoll, sich auf den strikt lokalen Fall zu beschränken.
- Der Führer einer elliptischen Kurve, [MSD], [Si] IV §10. Hiermit stellen wir einen Bezug zur AG über Modularität elliptischer Kurven her.

Literatur

[Ar] Artin, M., *Néron Models*, in: Arithmetic Geometry, eds. Cornell/Silverman, Springer, 1985, 213–230.

[BLR] Bosch, S., Lütkebohmert, W., Raynaud, M., *Néron Models*, Springer, 1990.

[Liu] Liu, Q., *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves*, Oxford University Press, 2002.

[MSD] Mazur, B., Swinnerton-Dyer, P., *Arithmetic of Weil Curves*, Invent. math. **25** (1974), 1–61.

[Ne] Néron, A., *Modèles minimaux des variétés abéliennes sur les corps locaux et globaux*, Publ. Math. IHES **21** (1964).

[Ra] Raynaud, M., Modèles de Néron, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris* **262** (1966), 413–416.

[Si] Silverman, J., *Advanced Topics in the Arithmetic of Elliptic Curves*, Springer GTM **151**, 1994.