Programm zum Workshop über Nagata-Kompaktifizierung am 17.7.04 in Bonn

In diesem Workshop soll es um den folgenden Satz gehen:

Theorem. *Sei S ein noethersches Schema, und sei $f\colon X \to S$ ein separierter Morphismus von endlichem Typ. Dann existiert ein eigentliches S-Schema $\bar{X}$ und eine offene dominante Immersion $j\colon X \to \bar{X}$ über S.*

Diese Theorem besitzt mannigfaltige Anwendungen. Es wird zum Beispiel in der allgemeinen Definition étaler Kohomologie mit kompaktem Träger benutzt.

Der ursprüngliche Beweis von Nagata ist in Termen der Bewertungstheorie. Inzwischen gibt es (mindestens) zwei Versionen in moderner "Grothendieckscher" Terminologie, nämlich [Co] und [Lü]. Beide sind sich sehr ähnlich. Alle wichtigen Schritte sind dieselben. Lütkebohmert diskutiert am Ende noch ein paar Aspekte über die Existenz spezieller Kompaktifizierungen. An vielen technischen Stellen verweist er auf eine Arbeit von Raynaud und Gruson [RG], die an entscheidender Stelle wohl noch eine kleine Lücke aufweist[1]. Dagegen benutzt B. Conrad nur elementare (d.h. in EGA erklärte) algebraische Geometrie. Wir werden uns daher im Folgenden nach [Co] richten. Alle Verweise beziehen sich auf diese Arbeit. Um die Kompatibilität zwischen den einzelnen Vorträgen zu sichern, halten wir uns sklavisch an die von B. Conrad benutzten Notationen.

Die Idee ist grob gesprochen die Folgende[2]: Falls S and X affin sind, kann man X als abgeschlossenes Unterschema eines affinen Raums über S realisieren und $\bar{X}$ als projektiven Abschluss von X definieren. Im Allgemeinen muss man die lokalen Kompaktifizierungen "nur" noch zu einer gobalen Kompaktifizierung verkleben. Leider werden solche Verklebungen nur selten separiert geschweige denn eigentlich sein. Dazu müssen die lokalen Kompaktifizierungen behutsam durch Aufblasung verändert werden, so dass Komponenten voneinander getrennt werden, die sonst beim Verkleben zu Nichtsepariertheits-Phänomenen führen würden. Dass dies möglich ist, ist die Aussage von Theorem 1.5, das im vierten Vortrag bewiesen wird.

Auf dem Weg dorthin müssen wir allerdings hart arbeiten und ein kleines Arsenal von Lemmata über Aufblasungen (Vortrag 1 und Vortrag 3) bereitstellen. Außerdem werden wir einen Satz über die Fortsetzung rationaler Abbildungen nach Aufblasung beweisen (Vortrag 2). Dieser Satz ist von unabhängigem Interesse. Sein Beweis ist allerdings sehr aufwendig.

Nach dieser Vorarbeit können dann eine konstruktive Verfeinerung des Lemmas von Chow und Theorem 1.5 gezeigt werden. Danach ist es nicht mehr schwierig, den Hauptsatz zu beweisen (Vortrag 5).

---

[1] Zumindest wird dies in [Co] behauptet, ich habe es nicht überprüft.

[2] Ich paraphrasiere hier nur die Einleitung von [Co].

1. Vortrag: Aufblasungen I (60 Minuten)

Dies ist §0 aus [Co]. Am Anfang werden die Begriffe der "Aufblasung" und der "strikten Transformierten" wiederholt und verschiedene Beschreibungen gegeben. Obwohl sicherlich wohlbekannt, sollte der Vortragende dies nicht übergehen. Der Beweis von Lemma 0.0 kann bei Zeitmangel weggelassen werden. Anschließend sollen die Lemmata 0.1–0.4 bewiesen werden.

2. Vortrag: Fortsetzungen von Quasi-Dominierungen (75 Minuten)

In diesem Vortrag soll der Begriff der Quasi-Dominierung eingeführt werden (Anfang von §1) und Theorem 1.1 bewiesen werden.

3. Vortrag: Aufblasungen II (50 Minuten)

Hier geht es um die noch ausstehenden technischen Lemmata 1.4, 2.1 und 2.2.

4. Vortrag: Separiertes Verkleben von Schemata entlang offener dichter Unterschemata (40 Minuten)

In diesem Vortrag geht es um den Beweis der Verfeinerung des Lemmas von Chow (Korollar 1.3) und den Beweis von Theorem 1.5 unter Benutzung des bereits im dritten Vortrag bewiesenen Lemmas 1.4. Korollar 1.6 sollte nur mündlich erwähnt werden.

5. Vortrag: Nagatas Kompaktifizierungssatz (30 Minuten)

Theorem 3.1.

Referenzen

[Co] B. Conrad: *Deligne's notes on Nagata compactification*, http://www-math.mit.edu/∼dejong/#brian

[Lü] W. Lütkebohmert: *On Compactification of Schemes*, Manuscripta Mathematica **80**, 95–111 (1993)

[RG] M. Raynaud, L. Gruson: *Critères de platitude et de projectivité*, Invent. Math. **13**, 1–89 (1971)