PROGRAMM ZUM WORKSHOP ÜBER DAS MORI-PROGRAMM
am 8.7.00 in Köln

Beim nächsten Treffen der kleinen AG wollen wir etwas über Moris Programm zur Klassifikation von Varietäten anschauen. Da sich das an der Klassifikation von Flächen orientiert, soll diese zuerst kurz wiederholt werden. In höherer Dimension hofft Moris Programm, wieder minimale Modelle zu finden (für Flächen beseitigt man dazu “überflüssige” Aufblasungen), die dann wieder in Bündel über etwas Niederdimensionalen und solche Varietäten, die man (fast?) mit dem kanonischen Bündel projektiv einbetten kann, aufgeteilt werden.

Das Ziel des Treffens soll sein, das Programm sowie das erste Resultat, das einen Hinweis auf eine Verallgemeinerung der Flächenklassifikation gibt, zu verstehen, um schließlich den Satz über den Kegel der Kurven zu beweisen, der für Flächen wieder die grobe Klassifikation liefert.

Über das Mori Programm gibt es einige schöne Literatur. Wir werden uns für das Treffen im wesentlichen an den Astérisque Band [CKM] halten, auf den sich im folgenden die Literaturangaben beziehen, sehr ähnlich ist die Darstellung im Buch von Kollar und Mori [KM]. Auerdem gibt es noch den sehr ausführlichen DMV Seminarband von Miyaoka und Peternell [MP], in dem ebenfalls alle Ergebnisse, die wir anschauen werden bewiesen sind. Der mag zur Vorbereitung auch nützlich sein.

1.Vortrag: Erinnerung an die Klassifikation von Flächen: (30 min)

Für Moris Ansatz, Varietäten zu klassifizieren, sind die Flächen das Beispiel zum Festhalten. Es gab da 2 Schritte: (i) Minimale Modelle finden: Castelnuovos Kriterium sagt, daß man genau die rationalen (-1)-Kurven kontrahieren kann. (ii) Wenn wir solche nicht finden, gibt es entweder (viele) rationale Kurven auf unserer Fläche X ($\Rightarrow$ unsere Fläche ist $P^2 \Leftrightarrow -K_X$ ample) oder ein P^1-Bündel ($-K_X$ relativ ample für das Bündel), sonst ist K_X nef (d.h. $K_X.C \geq 0$ für aller Kurven C auf X) und dann mußten wir noch arbeiten, um das in 3 Klassen aufzuteilen. (elliptische Faserungen / $\kappa = 1$ / $\kappa = 2 \Rightarrow$ prima Modulraum.)

Diese Resultate sollen hier kurz wiederholt werden (das darf ruhig skizzenhaft sein). Als Quelle ist das Preprint von Miles Reid [Reid] (in Kapitel D und E gibt er die Resultate an) schön, dort sind die Formulierungen gleich passend zu den nächsten Vorträgen gewählt.

Den einfachen Teil von Castelnuovo kann man verallgemeinern, für jede (eigentliche) birationale Abbildung kann man die Fasern durch P^1'se überdecken. (Skizziere (oder weniger) 1.3 in [KM] und Folgerung 1.4, das ist in [CKM] 1.2 & Folgerung)

Und man bekommt ein Bend&Break-Lemma (1.6 in [CKM] bzw. 1.7 in [KM]) daraus, das sagt, daß man immer rationale Kurven finden kann, wenn man eine Familie von Kurven findet, die man deformieren kann. Es wäre schön, wenn dies bewiesen werden könnte.

Vortrag 2: Deshalb interessieren wir uns jetzt für rationale Kurven auf Varietäten: (40min)

Es gibt hier den Satz (Theorem 1.8 in [CKM]/Theorem 1.10 in [KM]) zu beweisen, daß man sogar durch jeden Punkt auf X eine rationale Kurve finden kann, wenn das Inverse des kanonischen Bündels ($-K_X$) ample ist. Den Satz kann man dann noch verallgemeinern (man benötigt nur eine Kurve C auf X mit $C.(-K_X) > 0$) (Theorem 2.6 in [CKM] bzw 1.13 [KM]), was sehr ähnlich funktioniert, deshalb könnte man vielleicht nur das erste beweisen und die Verallgemeinerung angeben.

Der Beweis ist klasse.

Vortrag 3: Einführung in Moris Kegel der Kurven: (60 min)

Man kann die Resultate der Klassifikation von Flächen überraschenderweise umformuliern, indem man die Kegel der Kurven (positive Linearkombinationen von Kurven in den 1-Zyklen modulo rationale Äquivalenz) bzw. den amplen Kegel (der amplen Bündel) und ihre extremalen Strahlen/Flächen anguckt.

Diese sollen hier definiert werden, vielleicht ein paar Beispiele angeben (siehe Abschnitt 1.3 in [KM], ein bißchen kurz ist der Anfang von Lecture 4 in [CKM] dazu) (z. B. (-1)-Kurven sind extremal, was passiert wenn man die zusammenbläst), für linierte Flächen einfach, für das Produkt zweier elliptischer Kurven kann man einen runden Kegel bekommen...) (20 min?)

Dazu gilt der Kegelsatz (4.7 in [CKM] bzw. 1.24 in [KM]), der in etwa sagt, daß der Teil des Kegels der Kurven, die negative Schnittzahl mit dem kanonischen Bündel haben, von (abzählbar vielen) rationalen Kurven aufgespannt wird. Das ist das Hauptresultat, das in diesem Vortrag gezeigt (d. h. bewiesen) werden soll. (25 min?)

Mit diesem Satz kann man die grobe Klassifikation der Flächen wieder herausbekommmen. (Thm 1.28 in [KM] bzw. 3.8 in [CKM] (15 min ?)

Vortrag 4 Moris Programm: (40 min)

Hier soll jetzt Moris Strategie zur Klassifikation algebraischer Varietäten erklärt werden. (Lecture 5 in [CKM] (z.B. 5.12/5.5/5.2 erzählen) oder auch in [KM] Abschnitt 2.1 (wir haben aber keine Zeit über Flips zu reden)). Dabei sollte erklärt werden, wieso man sich doch für singuläre Varietäten interessiern muß, und eventuell sollte noch ein Beispiel für eine höherdimensionale Kontraktion angegeben werden.

Dann soll daraus noch eine Vorbereitung für den allgemeineren Kegelsatz gemacht werden, wir müssen definieren was kanonische Singularitäten sind (ein Beispiel wäre wieder gut). (In Lecture 6 [CKM] oder in [KM] 4.1)

Schließlich soll noch der Kegelsatz formuliert werden (Lecture 9.6 in [CKM] bzw 3.7 in [KM]) (besser an [KM] anlehnen, damit die Kontraktion explizit auftaucht), der sagt, daß auch für höherdimensionale Varietäten die negativen (d.h. $C.K_X < 0$) extremalen Strahlen durch rationale Kurven erzeugt sind, die man kontrahieren kann.

Vortrag 5 Der allgemeinere Kegelsatz: (50 min)

Zum Abschluß soll nun der Kegelsatz (9.6 in [CKM] bzw. 3.7 in [KM]) – modulo einiger Resultate – bewiesen werden. Um zu sehen, wie man vielleicht für singuläre Varietäten weiterkommen kann, wollen wir exemplarisch diesen Satz beweisen. Dazu benötigt man den Rationalitätssatz, und am Ende ein Kriterium das garantiert, daß ein Divisor keine Basispunkte hat, die beide nicht bewiesen werden.

Bibliographie

[CKM] H. Clemens, J. Kollar, S. Mori: *Higher dimensional complex geometry*, Astérisque **166**, 1988

[KM] J. Kollar, S. Mori: *Birational Geometry of Algebraic Varieties*, Cambridge University Press 1998

[MP] Y. Miyaoka, T. Peternell: *Geometry of Higher Dimensional Algebraic Varieties*, DMV Seminar **26**, Birkhäuser 1997

[Reid] Miles Reid: *Chapters on Algebraic Surfaces*, alg-geom/9602006 (http://xxx.lanl.gov) das ist mittlerweile erschienen in *Complex Algebraic Geometry*, IAS/Park City Mathematics Series Vol. 3, AMS 1997, (Hrsg. J. Kollar)