Kleine AG

Kubische Flächen

Do. 17.4.2003, Bonn

1 Birationale Transformationen und minimale Modelle

In diesem Vortrag sollen die grundlegenden Konzepte der Theorie der algebraischen Flächen, die wir im Laufe des Tages benötigen, bereitgestellt werden. Alle Sätze sollen für glatte projektive Flächen über einem beliebigen Grundkörper k formuliert werden. Für Beweise wird keine Zeit bleiben; man sollte eher an die Anschauung appellieren. Im Einzelnen:

- Sei X eine algebraische Fläche und $x \in X$ ein abgeschlossener Punkt. Erläutere die Konstruktion der Dilatation (Aufblasung) von X in x. Siehe [Man74, III.19.3], [Sha66, Lecture 2], [Har77, I.4 und II.7].

  Diskutiere dann den Effekt einer Dilatation auf $\mathrm{Pic}(X)$, $\mathrm{NS}(X)$ und ω_X: [Man74], Proposition III.20.4, Korollar 20.9.1 und Proposition 20.10. Siehe auch [Sha66], Lecture 5+6.

  Definiere schließlich was eine exzeptionelle Kurve ist und diskutiere das Kriterium von Castelnuovo: [Man74], Satz III.21.5 (oder [Sha66], Lecture 6 oder [Har77], Satz V.5.7).

- Die zwei Hauptresultate über die Struktur von rationalen Abbildungen zwischen Flächen: jeder birationale Morphismus ist eine Verkettung von Dilatationen ([Man74] Satz III.18.2); Elimination der Unbestimmtheit, siehe [Man74], Satz III.18.4 und Korollar 18.5.

- Definiere, was ein minimales Modell ist. Kurze Diskussion des geometrischen Falles, siehe [Man74], III.18.7.3.

Dauer: 60 min.

2 Del Pezzo–Flächen

Wir definieren eine Del Pezzo–Fläche wie Manin als eine Fläche die birational trivial ist und deren antikanonisches Bündel *ample* (üppig?) ist. Ziel des Vortrags ist die vollständige Klassifizierung von Del Pezzo–Flächen über einem beliebigen algebraisch abgeschlossenen Körper, wie in [Man74, II.24].

- Definition einer Del Pezzo–Fläche; Beispiel der kubischen Flächen (Satz 24.1). Zum Beweis sollte man a.) für die Unirationalität von kubischen Flächen auf den 5. Vortrag verweisen und b.) den Satz zitieren der sagt daß eine unirationale Fläche über einem algebraisch abgeschlossenen Körper birational trivial ist.

- Zeige, daß eine Del Pezzo–Fläche vom Grad d (für $1 \leq d \leq 9$) das gleiche ist wie die Aufblasung des $\mathbb{P}^2$ in $r := 9 - d$ Punkten 'in allgemeiner Lage' (Ausnahme: $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$). Siehe [Man74], Sätze IV.24.3, 24.4 und 24.5. Siehe auch [Har77], §V.4.

Dauer: 60 min.
Vortragender: Christian Liedtke.

3 Die 27 Geraden

Ich schlage vor, an dieser Stelle etwas von Manins Darstellung abzuweichen und die Ergebnisse von [Man74], IV.25 nur für den Fall der kubischen Flächen zu diskutieren.

- Als Anwendung der Ergebnisse von Vortrag 1 und 2 erhält man unmittelbar [Man74, Satz IV.23.8].

- Zeige, daß es genau 27 exzeptionelle Klassen in $\mathrm{Pic}(X)$ gibt (es folgt aus Vortrag 2 daß dies genau die auf X liegenden Geraden sind). Den Beweis kann man wie in [Har77], Satz V.4.9, führen.

- Beschreibe die 'Konfiguration' der 27 Geraden und ihre Automorphismengruppe, wie in [Har77], Bemerkung V.4.10.1 (beachte daß die vorangegangene Proposition 4.10 unmittelbar aus dem Kriterium von Castelnuovo und den Ergebnissen von Vortrag 2 folgt).

- Kurze Erinnerung, was ein Wurzelsystem ist. Definiere das in $\mathrm{Pic}(X) \otimes \mathbb{R}$ enthaltene Wurzelsystem R_6 (siehe [Man74], Definition IV.23.7(iv)) und identifiziere es mit dem klassischen Wurzelsystem E_6. Aus der Tatsache, daß die Weylgruppe von E_6 genau 51840 Elemente hat, folgere man daß folgende Gruppen auf natürliche Weise miteinander identifiziert werden können:

  1. die Weylgruppe des Wurzelsystems R_6,
  2. die Gruppe der Automorphismen von $\mathrm{Pic}(X)$, die das Schnittprodukt und die kanonische Klasse erhalten, und
  3. die Automorphismengruppe der Konfiguration der 27 Geraden.

  Siehe [Har77], Übung V.4.11 und [Man74], Satz IV.23.9.

Dauer: 45 min.

4 Anzahl der Punkte über einem endlichen Körper

Sei X eine kubische Fläche über einem Körper k mit q Elementen. Kennt man die Effekt des Frobenius auf den 27 Geraden, so kann man mithilfe der Weil–Vermutung die genaue Anzahl der k-rationalen Punkte von X bestimmen.

1. Definition der Zetafunktion. Formuliere die Weil–Vermutung. Siehe z.B. [Mil80], VI.12. Im Fall einer Fläche, die über $\bar{k}$ birational trivial wird, kann man die Weil–Vermutung ohne étale Kohomologie beweisen. Skizzieren den Beweis wie in [Man74], IV.27.

2. Diskutiere ausführlich das Beispiel der Fläche

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \;=\; a\,x_0^3,$$

mit $a \in \mathbb{F}_q$ und $q \equiv 1 \mod 3$. Beschreibe die 27 Geraden und den Charakter der Operation von $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ auf $\mathrm{Pic}(X \otimes \bar{k})$. Siehe [Sha66], Lecture 5, p. 78-79. Aus der Lefschetz–Spurformel (siehe [Man74], IV.27.12) folgt dann, daß

$$|X(\mathbb{F}_q)| \quad = \quad \begin{cases} 1 + 7q + q^2, & \text{falls } a \in (\mathbb{F}_q^\times)^3, \\ 1 - 2q + q^2, & \text{sonst.} \end{cases}$$

3. Falls noch Zeit übrig ist, könnte man erwähnen daß es noch einen anderen Beweis für obige Formel gibt, der Gauß– und Jakobi–Summen benutzt. Siehe [Wei49] oder [IR72], §8,10. Interessant ist auch daß diese Berechnungen Weil erst auf seine Vermutung gebracht haben.

Dauer: 45 min.

5 Unirationalität

Ziel dieses Vortrages ist zu zeigen daß eine ‘allgemeine’ kubische Fläche (über einem algebraisch nicht abgeschlossenen Körper) zwar unirational aber nicht birational trivial ist. Konkret kann man durch Analyse der Galoisoperation auf den 27 Geraden den minimalen Grad einer Parametrisierung durch $\mathbb{P}^2$ abschätzen.

- Sei X zunächst eine beliebige glatte projektive Fläche über k. Zeige, daß die Galoiskohomologiegruppe

$$H^1(k, \mathrm{NS}(X \otimes \bar{k}))$$

eine birationale Invariante von X ist ([Man74], Satz IV.29.1, Korollar 29.1.1 und Korollar 29.1.4). Wenn X unirational ist, d.h. wenn es eine generisch endliche rationale Abbildung $\varphi : \mathbb{P}^2_k \to X$ gibt, dann teilt der Grad von φ den Exponenten der Gruppe $H^1(k, \mathrm{NS}(X \otimes \bar{k}))$ (Satz 29.2; die Aussage dieses Satzes ist allerdings etwas schärfer und sollte auch so formuliert werden).

- Ist X eine kubische Fläche, so kann man die Ergebnisse aus Vortrag 3 benutzen, um den Exponenten von $H^1(k, \mathrm{NS}(X \otimes \bar{k}))$ durch die Zahl 6 abzuschätzen, siehe [Man74], Satz IV.29.3 (ohne Beweis).
- Zeige für das Beispiel aus Vortrag 4, daß $H^1(k, \mathrm{NS}(X \otimes \bar{k}))$ nichttrivial ist. Siehe [Sha66], p. 78-79 oder [Man74], VI.45.4.
- Beweise Satz IV.29.4 aus [Man74] für kubische Flächen. Dieser Satz sagt, daß eine kubische Fläche mit einem k-rationalen Punkt außerhalb der 27 Geraden unirational ist (siehe auch den Beweis von Satz II.12.11). Wenn dann noch Zeit bleibt, skizziere den Beweis von Satz IV.30.1, der die Voraussetzung über die Existenz des Punktes im vorhergegangenen Satz beseitigt, wenn k 'groß genug' ist.

Dauer: 45 min.

References

[Har77] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer–Verlag, 1977.

[IR72] K. Ireland and M. Rosen, *A classical introduction to modern number theory*, Springer–Verlag, 1972.

[Man74] Yu.I. Manin, *Cubic forms: Algebra, geometry, arithmetic*, North–Holland, 1974.

[Mil80] J.S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton Univ. Press, 1980.

[Sha66] I.R. Shafarevich, *Letures on minimal models and birational transformations of two dimensional schemes*, Tata Institut, Bombay, 1966.

[Wei49] A. Weil, *Numbers of solutions of equations in finite fields*, Bull. AMS (1949), 497–508.