Jacobische von Kurven

1. Vortrag

Der relative Picard-Funktor (40 min.)

In diesem Vortrag soll der relative Picard-Funktor definiert werden, und es werden einige Vorbereitungen für den Beweis der Darstellbarkeit getroffen. Die Verweise beziehen sich auf [BLR] 8.1. Vergleiche aber — auch für den zweiten Vortrag — auch Grothendiecks Artikel [G].

- Vielleicht ist es sinnvoll, mit einer *kurzen* Zusammenfassung der Diskussion zu Beginn von 8.1 zu beginnen (S. 199–201).
- Definition von $\mathrm{Pic}_{X/S}$ als fppf-Garbifizierung des Funktors $T \mapsto \mathrm{Pic}(X \times_S T)$ (Def. 2).
- Proposition 3 und 4 mit soviel Beweis, wie es die Zeit erlaubt.
- Zum Schluß soll der Begriff der kohomologischen Flachheit in Dimension 0 eingeführt und Thm. 7 (ohne Beweis) angegeben werden.

2. Vortrag

Darstellbarkeit des relativen Picard-Funktors (70 min.)

Alle Verweise beziehen sich auf [BLR] 8.2. Die Darstellbarkeit des Hilbert-Funktors werden wir nicht beweisen, sondern einfach benutzen. Selbst dann wird die Zeit sicher nicht reichen, um alles zu beweisen.

- Zuerst sollte das zu beweisende Ergebnis, d.h. Thm. 1, bzw. genauer Thm. 5, angegeben werden, und dazu insbesondere die Funktoren $\mathrm{Pic}^{\Phi}_{X/S}$ definiert werden.
- Dann sollte die Beweisstrategie (etwa wie auf S. 212) erläutert werden. Der Beweis wird dann in drei Schritten durchgeführt:
- **Schritt I:** Definition von effektiven relativen Cartier-Divisoren, Lemma 6 ohne Beweis, Proposition 7.
- **Schritt II:** $\mathrm{Div}_{X/S}$ ist darstellbar. Dieser Schritt ist für uns recht kurz, da wir auf die Darstellbarkeit von $\mathrm{Hilb}_{X/S}$ nicht näher eingehen. Wir brauchen also nur die Definition des Hilbert-Funktors und die Tatsache, daß $\mathrm{Div}_{X/S}$ ein offener Unterfunktor ist (S. 215), und zitieren dann Korollar 9.

- **Schritt III:** Dies ist wohl der aufwendigste Schritt. Zuerst sollten einige Worte über Äquivalenzrelationen in Kategorien und Quotienten gesagt werden (S. 219), und Thm. 12 sollte mit einer Beweisskizze angegeben werden. Dann kann die Darstellbarkeit von $\mathrm{Pic}^{\Phi}_{X/S}$ bewiesen werden. Eventuell bietet es sich an, nicht auf den Begriff einer beschränkten Familie kohärenter Garben und Prop. 13 und 14 einzugehen, sondern die Konsequenzen, die wir benötigen, als Fakten zu zitieren.

3. Vortrag

Der relative Picard-Funktor von Kurven: die Jacobische (60 min.)

Im folgenden betrachten wir den relativen Picard-Funktor zu einer glatten projektiven Kurve C über einem Körper k. Genauer gesagt interessieren wir uns für die Zusammenhangskomponente der Eins, $\mathrm{Pic}^0_{C/k}$. Diese ist eine abelsche Varietät und heißt die Jacobische von C.

- Definition von $\mathrm{Pic}^0_{C/k}$ und Beweis, daß dies eine abelsche Varietät ist. ([BLR] 8.4/2, 3).
- Identifikation mit der Jacobischen im Sinne von [M] Thm. 1.1
- Der Tangentialraum der Jacobischen und der kanonische Morphismus $C \longrightarrow J$ ([M] §2).
- Eventuell: Zusammenhang zur klassischen Definition der Jacobischen über $\mathbb{C}$ ([M], Ende von §2).
- Definition der symmetrischen Potenzen von C ([M], Beginn von §3, aber ganz kurz) und der kanonischen Abb. $C^{(r)} \longrightarrow J$, Theorem 5.1 in [M].
- Die Jacobische als Albanese-Varietät ([M] Prop. 6.1 und 6.4).

4. Vortrag

Weitere Eigenschaften von Jacobischen (40 min.)

Womöglich ist es sinnvoll, bei einem der Punkte auf den Beweis zu verzichten, und den anderen dann etwas sorgfältiger zu beweisen. Die Verweise beziehen sich auf [M].

- Selbstdualität der Jacobischen (Thm 6.6).
- Abelsche Varietäten als Quotienten von Jacobischen (§10).

5. Vortrag

Der Satz von Torelli (60 min.)

Als Abschluß soll der Satz von Torelli ([M] Thm. 12.1) bewiesen werden, der besagt, daß eine Kurve (über einem algebraisch abgeschlossenen Körper) eindeutig durch ihre Jacobische (zusammen mit der kanonischen Polarisierung) bestimmt ist. Als Anwendung können die Korollare 12.2 und 12.3 in [M] angegeben werden. Eine weitere Anwendung ist die Existenz des groben Modulschemas der Kurven vom Geschlecht g (vgl. [GIT], ch. 7 §4).

Literatur

[BLR] S. Bosch, W. Lütkebohmert, M. Raynaud, *Néron Models*, Erg. der Math., 3. Folge, Band 21, Springer-Verlag 1990.

[G] A. Grothendieck, *Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique. V. Les schémas de Picard. Théorèmes d'existence* Sém. Bourbaki, t. 14, exp. 232, 1961/62.

[GIT] D. Mumford, J. Fogarty, F. Kirwan, *Geometric Invariant Theory*, Erg. der Math., 2. Folge, Band 34, 3. Aufl., Springer-Verlag 1994.

[M] J. Milne, *Jacobian Varieties*, in: G. Cornell, J. Silvermann, Arithmetic Geometry, Springer-Verlag 1986.