Iwasawa-Theorie

Das Thema dieses Workshops ist die Theorie der Galois-Erweiterungen algebraischer Zahlkörper mit Galois-Gruppe $\mathbb{Z}_p$ ($\mathbb{Z}_p$-Erweiterungen). Nach einigen Vorbereitungen im ersten Vortrag beweisen wir im zweiten Vortrag das Theorem von Iwasawa über die Klassenzahlen im zu einer $\mathbb{Z}_p$-Erweiterung eines Zahlkörpers gehörigen Körperturm.

In den Vorträgen 3 und 4 definieren wir p-adische L-Funktionen; zunächst behandeln wir die klassische Definition, dann die von Iwasawa. Diese L-Funktionen stehen durch die 'Hauptvermutung' in einer engen Verbindung zur Iwasawa-Theorie. Diese Hauptvermutung, die von Mazur und Wiles bewiesen wurde, werden wir im 5. Vortrag ansprechen. Ihre Aussage ist in gewissem Sinne analog zur Riemannschen Vermutung für algebraische Kurven über endlichen Körpern, und sie stellt ein zentrales Ergebnis der Theorie dar.

Literatur: Wir richten uns im wesentlichen nach dem Buch [W] von Washington. Im Buch [NSW] von Neukirch, Schmidt und Wingberg sind einige Sachen etwas prägnanter erklärt. Insbesondere findet man hier eine schöne Einführung zur Hauptvermutung. Zu letzterer ist auch der Artikel [C] von Coates lesenswert, der sich allerdings zum größten Teil mit dem Beweis befaßt, und insofern über den 5. Vortrag weit hinausgeht. Schließlich gibt es noch die Bücher [L] von Lang, die ich mit allerdings nicht genauer angeschaut habe.

Natürlich dürfte es sich auch lohnen, einen Blick in die Originalarbeiten zu werfen, z. B. [I], [MW], [Wi]. Zumindest bei den Artikeln von Mazur und Wiles ist das aber wohl mit einigem Aufwand verbunden.

Voraussetzungen: Grundkenntnisse über globale Klassenkörpertheorie, etwa im Umfang des Anhangs von [W] setzen wir voraus. Insbesondere brauchen wir den Begriff des Hilbertschen Klassenkörpers. An einigen Stellen würde es sich anbieten, etwas über die Leopoldt-Vermutung zu sagen; aus Zeitgründen müssen wir aber darauf verzichten.

1. Vortrag. $\mathbb{Z}_p$-Erweiterungen und die Iwasawa-Algebra (45 min.)

Wir beginnen mit der Definition von $\mathbb{Z}_p$-Erweiterungen ([W] 13.1, [NSW] 10.3.17). Als wichtigstes Beispiel die zyklotomische Erweiterung eines Zahlkörpers definieren.

Als nächstes soll die Anzahl unabhängiger $\mathbb{Z}_p$-Erweiterungen eines Zahlkörpers bestimmt werden ([W] Thm. 13.4, [NSW] 10.3.20ii). Dazu brauchen wir einige Vorbereitungen über Verzweigung in $\mathbb{Z}_p$-Erweiterungen ([W] Prop. 13.2, Lemma 13.3) und etwas Klassenkörpertheorie.

Im zweiten Teil dieses Vortrags soll die Iwasawa-Algebra $\Lambda = \mathbb{Z}_p[\![\Gamma]\!]$ definiert werden ([W] §7.1) und es soll gezeigt werden, daß sie isomorph zum Potenzreihenring $\mathbb{Z}_p[\![T]\!]$ ist ([W] Thm. 7.1). Der Beweis darf gegebenenfalls gekürzt werden, aber der Weierstrasssche Vorbereitungssatz sollte in jedem Fall explizit angegeben werden, da wir ihn auch später noch brauchen.

Schließlich soll das Theorem über die Struktur von Moduln über der Iwasawa-Algebra angegeben werden ([W] Thm. 13.2, [NSW] 5.3.8). Dieses Theorem spielt eine wesentliche Rolle im Beweis des Theorems von Iwasawa, das im zweiten Vortrag behandelt wird. Der Beweis des Struktursatzes ist aber eher technisch, und es soll daher genügen, nur einige Worte zur Beweisidee zu sagen.

2. Vortrag. Das Theorem von Iwasawa (45 min.)

In diesem Vortrag soll das Theorem von Iwasawa ([W] Theorem 13.3, [NSW] 11.1.6) bewiesen werden, das eine schöne Regelmäßigkeit der (p-Anteile der) Klassenzahlen in dem zu einer $\mathbb{Z}_p$-Erweiterung gehörigen Körperturm aufzeigt. Die Beweisidee ist, grob gesprochen, die folgende: Wir realisieren die p-Sylowgruppen der Klassengruppen als Galoisgruppen der p-Hilbertschen Klassenkörper; ihr inverser Limes ist ein Λ-Modul, auf den wir den Struktursatz aus dem ersten Vortrag anwenden können.

Zum Schluß sollte noch erwähnt werden, daß für die zyklotomische Erweiterung eines abelschen Zahlkörpers $\mu = 0$ gilt ([W] Thm 7.15). Der Beweis ist allerdings ziemlich langwierig, und wir müssen ihn daher auslassen.

3. Vortrag. p-adische L-Funktionen I (60 min.)

Zum Beginn sollten einige Worte über Dirichlet-Charaktere gesagt werden (Definition, Führer, Definition des Produkts von zwei Charakteren; vgl. die ersten Seiten von [W] Kap. 3)

Danach wiederholen wir einige grundlegende Eigenschaften der Dirichletschen L-Funktion $L(s, \chi)$ (Definition, meromorphe Fortsetzung, Funktionalgleichung, Euler-Produkt, natürlich alles ohne Beweis). Wir brauchen auch die Hurwitzsche ζ-Funktion und (verallgemeinerte) Bernoulli-Zahlen und Bernoulli-Polynome. All dies findet sich auf den ersten Seiten von [W] Kap. 4. Schließlich zitieren wir [W] Thm. 4.2, das die Werte der L-Funktion an den Stellen $1 - n$, $n \geq 1$ eine ganze Zahl, in Termen verallgemeinerter Bernoulli-Zahlen ausdrückt.

Unser Ziel ist es eine p-adisch analytische Funktion zu definieren, die diese Werte (bis auf den Euler-Faktor bei p) interpoliert.

Bevor wir diese p-adische L-Funktion definieren können, brauchen wir noch ein paar Tatsachen über p-adische Funktionen (siehe [W] Kap. 5.1; wir brauchen die p-adische Exponentialfunktion und den Logarithmus, die Funktionen $\binom{X}{n}$ und $\langle a \rangle^s$ und Proposition 5.8 (ohne Beweise)).

Nun können wir die p-adische L-Funktion definieren ([W] Thm. 5.9 und Thm. 5.11).

Schließlich sollen [W] Thm 5.12, die Korollare dazu und Thm. 5.16 zumindest angegeben werden. Wenn noch Zeit bleibt, etwas zum Beweis zu sagen, um so besser.

4. Vortrag. p-adische L-Funktionen II (60 min.)

In diesem Vortrag betrachten wir eine andere Möglichkeit, die p-adische L-Funktion zu definieren.

Dazu führen wir zuerst die Stickelberger-Elemente ein ([W] Kap. 6.2) und beweisen den Satz von Stickelberger (Thm. 6.10). Allerdings beschränken wir uns auf den Fall $\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q}$, wodurch sich der Beweis etwas vereinfacht; siehe [W] Thm. 15.1.

Wenn genug Zeit ist, könnte man an dieser Stelle etwas zum Satz von Herbrand und seiner Umkehrung (bewiesen von Ribet) sagen ([W] Kap. 6.3)

Jetzt können wir die Konstruktion der p-adische L-Funktionen nach Iwasawa durchführen ([W] Kap. 7.2). Die im Beweis von Proposition 7.6 benötigten Rechnungen sollte man wohl hier und da etwas abkürzen. Zum Abschluß beweisen wir, daß diese L-Funktionen mit denen aus dem vorherigen Vortrag übereinstimmen ([W] Thm. 7.10).

5. Vortrag. Die Hauptvermutung (30 min.)

Im letzten Vortrag streifen wir noch die sogennante Hauptvermutung der Iwasawa-Theorie, die zentral für die ganze Theorie ist. Sie wurde von Mazur und Wiles [MW], [Wi] bewiesen.

Hier soll einfach die Aussage der Hauptvermutung genannt und motiviert werden. In [NSW] Kap. XI §6 befindet sich dazu mehr als genügend Material; siehe auch [W] Kap. 13.6 und den Artikel [C] von Coates. Insbesondere die Analogie zum Funktionenkörperfall sollte zur Sprache kommen (siehe dazu auch [W] Kap. 7.4). Wenn noch Zeit bleibt, etwas über Anwendungen zu sagen, wäre das schön.

Literatur

[C] J. Coates, *The work of Mazur and Wiles on cyclotomic fields*, Sém. Bourbaki 575, in Springer Lecture Notes in Math. 901, 1981.

[I] K. Iwasawa, *On $\mathbb{Z}_\ell$-extensions of algebraic number fields*, Ann. of Math. **89** 246–326 (1973).

[MW] B. Mazur, A. Wiles, *Class fields of abelian extensions of $\mathbb{Q}$*, Invent. Math. **76** 179–330 (1986).

[L] S. Lang, *Cyclotomic Fields I, II*, Springer Graduate Texts in Math. 59 (1978), 69 (1980).

[NSW] J. Neukirch, A. Schmidt, K. Wingberg, *Cohomology of Number Fields*, Springer Grundlehren der Math. Wiss. 323, 2000.

[W] L. Washington, *Introduction to Cyclotomic Fields*, Springer Graduate Texts in Math. 83, 2nd ed., 1996.

[Wi] A. Wiles, *The Iwasawa conjecture for totally real fields*, Ann. of Math. **131** 493–540 (1990).