PROGRAMM ZUM WORKSHOP ÜBER HODGE-STRUKTUREN UND TORELLI-SÄTZE

am 7.7.01 in Köln

In diesem Workshop sollen (reine) Hodgestrukturen projektiver glatter Varietäten über den komplexen Zahlen betrachtet werden. Insbesondere soll die Frage beleuchtet werden, inwiefern die Vorgabe der Hodgestruktur einer Varietät die Varietät selber bereits bestimmt (Torelli-Sätze). Nach einer allgemeinen Einführung in die Theorie der Hodgestrukturen und ihrer Variationen und einer Formulierung der verschiedenen Varianten von Torelli-Sätzen (in den ersten beiden Vorträgen) wollen wir speziell den Fall von K3-Flächen betrachten, um ein konkretes Beispiel zu haben. Die wesentliche Literaturquelle für den allgemeinen Hintergrund ist [KK]. Als Leitfaden für die Torelli-Sätze von K3-Flächen nehmen wir [LP] und [Pa], wobei die zweite Referenz ein wenig ausführlicher ist.

Notationen: Alle Varietäten sind reduziert und von endlichem Typ über dem Körper der komplexen Zahlen.

1. Vortrag: Hodgestrukturen und Periodenmatrizen (60 Minuten)

(1) Definition (reiner) Hodgestrukturen auf der Kohomologie von projektiven glatten Varietäten (oder allgemeiner von kompakten Kählermannigfaltigkeiten), siehe z.B. [GH] chap. 0, §7 oder [KK] chap. 1, §7 (für die Definition einer abstrakten reinen Hodgestruktur siehe z.B. [KK] chap. 2, 1.1). Hierbei sollte möglichst viel zum Beweis der Hodge-Zerlegung und ihrer Eigenschaften gesagt werden.

(2) Polarisierungen auf Varietäten ([KK] chap. 2, 1.2) und auf Hodgestrukturen (loc. cit. 1.1) und der Periodenmatrix von polarisierten Hodgestrukturen und ihr klassifizierender Raum (z.B. [Pa] I, 2 oder [GS] p.53).

(3) Periodenmatrizen von projektiven glatten Kurven ([Pa] I,1 und [KK] chap. 2, 1.6) und Angabe des klassischen Satzes von Torelli (wie in [Pa] I,1). Wenn Zeit bleibt, so kann noch auf die Interpretation der polarisierten Hodgestruktur einer Kurve als ihre Jacobische eingegangen werden.

2. Vortrag: Periodenräume und Torelli-Sätze (45 Minuten)

(1) Definition einer Variation von (polarisierten) Hodgestrukturen (z.B. [Ku] II, 2.2 oder [KK] chap. 2, 4.1) und die Periodenabbildung ([Ku] II, 2.3 und [KK] chap. 2, §3).

(2) Infinitesimale, lokale und globale Torelli-Sätze ([KK] chap. 2, §5), insbesondere Wiederholung der Kodaira-Spencer-Theorie.

3. Vortrag: K3-Flächen (60 Minuten)

(1) Kurze Wiederholung der Klassifikation von glatten projektiven Flächen (siehe z.B. [Pa] III), so weit wie es für die Einordung der K3-Flächen gebraucht wird.

(2) Definition und elementare Eigenschaften von K3-Flächen ([Pa] IV, besonders die ersten beiden Abschnitte (siehe auch [LP] §1)).

(3) Periodenräume glatter projektiver Flächen als Untervarietät von $\mathrm{Grass}_2(H^2)$ ([Pa] I,3 und V,4) mit einem speziellen Augenmerk auf K3-Flächen ([Pa] VII).
(4) Der Kähler-Kegel einer K3-Fläche ([LP] §1).

4. Vortrag: Lokaler Torelli für K3-Flächen (30 Minuten)

Beweis des lokalen Torellis in der Form von [LP] 5.7 (siehe auch [KK] chap. 3, §3). Eine alternative Referenz ist [Pa] V.

5. Vortrag: Globaler Torelli für K3-Flächen (75 Minuten)

Eine Beweisskizze des globalen Torelli-Satzes findet man auch in [Pa] VII,3. In [Pa] VIII und IX findet sich eine leicht modifizierte Version des globalen Torelli. Je nach Geschmack des Vortragenden kann hier mehr die eine Quelle oder mehr die andere benutzt werden.

(1) Kummer-Flächen und ihr Torelli-Satz ([LP] §§3,4).
(2) Dichtheit von Periodenpunkten markierter projektiver Kummer-Flächen ([LP] §6).
(3) Globaler Torelli-Satz für K3-Flächen in der Form [LP] 9.1. Die Ergebnisse aus [LP] §7 sollten aus Zeitgründen vielleicht nur zitiert werden, auf [LP] §8 kann etwas ausführlicher eingegangen werden.
(4) Anwendungen: [LP] 10.1 und 10.2 oder/und [Pa] X, XII, XIII.

Referenzen

[GH] P. Griffiths, J. Harris: *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley Classics Library (1994).

[GS] P. Griffits, W. Schmid: *Recent Developments in Hodge Theory.* in “Discrete Subgroups of Lie Groups and Applications to Moduli”, TATA Institute of Fundamental Research, Oxford University Press (1975).

[KK] V.S. Kulikov, P.F. Kurchanov: *Complex Algebraic Varieties: Periods of Integrals and Hodge Structures*, in Encyclopaedia of Mathematical Sciences **36**, Algebraic Geometry III (A.N. Parshin, I.R. Shafarevich (Eds.)), Springer (1998).

[Ku] V.S. Kulikov: *Mixed Hodge Structures and Singularities*, Cambridge Tracts in Mathematics **132**, Cambridge University Press (1998).

[LP] E. Looijenga, C. Peters: *Torelli Theorems for Kähler K3 surfaces*, Comp. Math. **42**, Fasc. 2, pp. 145–186 (1981).

[Pa] Séminaire Palaiseau: *Géométrie des Surfaces K3: Modules et Périodes*, Astérisque **126** (1985).