Programm zum Workshop

Eigenwerte von Summen hermitescher Matrizen

am 12.2.05 in Düsseldorf

In diesem Workshop soll es um vier Probleme aus verschiedenen Bereichen der Mathematik gehen, die alle auf analoge Fragestellungen führen. Erstaunlicherweise stellt sich heraus, dass all diese vier Fragen "dieselbe" Antwort besitzen. In der Tat stellen die Beweise einen faszinierenden Zusammenhang zwischen der Darstellungstheorie reduktiver Gruppen, Kombinatorik von Hecke-Algebren, symplektischer Geometrie, Problemen der elementaren Lineare Algebra, geometrischer Invariantentheorie und Schubert-Kalkül her.

Im Workshop wollen wir auf die folgenden Probleme eingehen (es gibt noch eine Reihe weiterer Varianten und Verallgemeinerungen):

Eigenwerte von Summen hermitescher Matrizen

Sei $n \geqslant 1$ eine ganze Zahl, und seien $A(1), \dots, A(m), C \in M_n(\mathbb{C})$ hermitesche Matrizen. Wir bezeichnen das Spektrum der Eigenwerte von $A(s)$ (für $s = 1, \dots, m$) mit

$$\alpha(s) \in \mathbb{R}^n_+ := \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n \,\}.$$

Analog sei γ das Spektrum der Eigenwerte von C.

Frage: Wann sind $\alpha(1), \dots, \alpha(m)$ und γ in $\mathbb{R}^n_+$ die Spektren von hermiteschen Matrizen $A(1), \dots, A(m)$ und C mit $C = A(1) + \ldots + A(m)$?

Relative Position von Gittern über einem diskreten Bewertungsring

Sei R ein diskreter Bewertungsring, π ein uniformisierendes Element, und sei K der Quotientenkörper von R. Fixiere einen n-dimensionalen K-Vektorraum V.

Sind Λ und Λ' zwei vollständige R-Gitter in V, so existiert nach dem Elementarteilersatz eine R-Basis $e_1, \dots, e_n$ von Λ, so dass

$$\Lambda' = \pi^{\alpha_1} e_1 R \oplus \pi^{\alpha_2} e_2 R \oplus \ldots \oplus \pi^{\alpha_n} e_n R,$$

wobei $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n$ ganze Zahlen sind, die nur von Λ und Λ' abhängen. Das Tupel $\alpha \in \mathbb{R}^n_+ \cap \mathbb{Z}^n$ der α_i heißt die *relative Position* von Λ und Λ' und wird mit $\operatorname{relpos}(\Lambda, \Lambda')$ bezeichnet.

Frage: Seien $\alpha(1), \dots, \alpha(m), \gamma \in \mathbb{R}^n_+ \cap \mathbb{Z}^n$. Wann existieren Gitter $\Lambda_0, \Lambda_1, \dots, \Lambda_m$ in V, so dass $\operatorname{relpos}(\Lambda_{i-1}, \Lambda_i) = \alpha(i)$ und $\operatorname{relpos}(\Lambda_0, \Lambda_m) = \gamma$?

Tensorprodukt von irreduziblen Datsellungen von $GL_n(\mathbb{C})$

Jede irreduzible, endlich-dimensionale, holomorphe Darstellung V von $GL_n(\mathbb{C})$ ist charakterisiert durch ihr höchstes Gewicht

$$\alpha = (\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n) \in \mathbb{R}^n_+ \cap \mathbb{Z}^n.$$

Schreibe $V = V(\alpha)$. Umgekehrt existiert für jedes $\alpha \in \mathbb{R}^n_+ \cap \mathbb{Z}^n$ eine irreduzible, endlich-dimensionale, holomorphe Darstellung V von $GL_n(\mathbb{C})$ mit $V = V(\alpha)$.

Jede endlich-dimensionale holomorphe Darstellung ist direkte Summe von irreduziblen Darstellungen.

Frage: Seien $\alpha(1), \ldots, \alpha(m), \gamma \in \mathbb{R}^n_+ \cap \mathbb{Z}^n$. Wann ist $V(\gamma)$ ein Summand des Tensorproduktes $V(\alpha(1)) \otimes \ldots \otimes V(\alpha(m))$?

Schubert-Kalkül

Sei $q \geqslant 0$ eine ganze Zahl. Fixiere eine Flagge im $\mathbb{C}^{n+q}$

$$(0) = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_{n+q} = \mathbb{C}^{n+q}$$

mit $\dim(F_i) = i$ für alle i. Es sei

$$X := \mathrm{Grass}_n(\mathbb{C}^{n+q})$$

die Varietät der n-dimensionalen Unterräume L von $\mathbb{C}^{n+q}$. Dies ist eine projektive komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension $\dim_{\mathbb{C}}(X) = qn$.

Für $P = \{p_1 < \ldots < p_n\} \subset \{1, \ldots, n+q\}$ sei

$$\Omega_P(F_\bullet) := \{\, L \in X \mid \dim(L \cap F_{p_i}) \geqslant i \text{ für alle } i \,\}$$

die zugehörige Schubert-Varietät. Ihre Homologieklasse ω_P ist unabhängig von der Wahl von $F_\bullet$.

Wir identifizieren Homologie und Kohomologie via Poincaré-Dualität, und setzen

$$\alpha_i = q + i - p_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Dann gilt

$$(*) \qquad q \geqslant \alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n \geqslant 0.$$

Sei $\sigma_\alpha \in H^{2(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)}(X, \mathbb{Z})$ die zu ω_P korrespondierende Kohomologie-Klasse. Die σ_α (für α wie in $(*)$) bilden eine $\mathbb{Z}$-Basis von $H^\bullet(X, \mathbb{Z})$. Insbesondere können wir also das Produkt von Klassen $\sigma_{\alpha(1)}, \ldots, \sigma_{\alpha(m)}$ als $\mathbb{Z}$-Linearkombination von irgendwelchen σ_γ's schreiben.

Frage: Seien $\alpha(1), \ldots, \alpha(m), \gamma \in \mathbb{R}^n_+ \cap \mathbb{N}^n_0$, und sei $q \geqslant \max\{\alpha_1(1), \ldots, \alpha_1(m), \gamma_1\}$. Wann erscheint σ_γ in dem Produkt $\prod_{s=1}^m \sigma_{\alpha(s)}$ mit einem von Null verschiedenen Koeffizienten?

(Es ist nicht schwierig zu sehen, dass die Antwort auf diese Frage unabhängig von der Wahl von q ist.)

Antworten

Eine notwendige Bedingung an die Tupel $\alpha(1), \ldots, \alpha(m)$ und γ ist in allen vier Fällen sicherlich die Identität

$$(\dagger) \qquad \sum_{k=1}^{n} \gamma_k = \sum_{s=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(s).$$

Im Workshop soll gezeigt werden, dass alle vier Fragen dieselbe Antwort haben und dass diese Antwort durch Ungleichungen der Form

$$(*)_{I(1),\ldots,I(m),K} \qquad \sum_{k \in K} \gamma_k \leqslant \sum_{s=1}^{m} \sum_{i \in I(s)} \alpha_i(s)$$

für gewisse Teilmengen $I(1), \ldots, I(m), K$ von $\{1, \ldots, n\}$ gegeben sind.

Um diese Tupel von Teilmengen zu beschreiben, brauchen wir die folgende Notation: Für jede r-elementige Teilmenge $I = \{i_1 < i_2 < \ldots < i_r\}$ von $\{1, \ldots, n\}$ setze

$$\lambda(I) = (i_r - r \geqslant \ldots \geqslant i_2 - 2 \geqslant i_1 - 1) \in \mathbb{R}_+^r \cap \mathbb{N}_0^r.$$

Theorem: *Seien $\alpha(1), \ldots, \alpha(m), \gamma \in \mathbb{R}_+^n$, so dass die Identität $(\dagger)$ gilt. Dann sind äquivalent:*

(1) Für alle $r < n$ und für alle Teilmengen $I(1), \ldots, I(m)$ und K von $\{1, \ldots, n\}$ derselben Kardinalität r, so dass $\sigma_{\lambda(K)}$ in $\prod_{s=1}^{m} \sigma_{\lambda(I(s))}$ mit einem von Null verschiedenen Koeffizienten erscheint, gilt die Ungleichung $(*)_{I(1),\ldots,I(m),K}$.

(2) $\alpha(1), \ldots, \alpha(m)$ und γ sind die Eigenwerte von hermiteschen Matrizen $A(1), \ldots, A(m)$ und C in $M_n(\mathbb{C})$, so dass $C = A(1) + \ldots + A(m)$.

Bestehen $\alpha(1), \ldots, \alpha(m)$ und γ nur aus ganzen Zahlen, so sind (1) und (2) äquivalent zu:

(3) Die Darstellung $V(\gamma)$ ist Summand von $V(\alpha(1)) \otimes \ldots \otimes V(\alpha(m))$.

(4) Für einen (äquivalent: für jeden) diskreten Bwertungsring R mit Quotientenkörper K existieren R-Gitter $\Lambda_0, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_m$ im K^n, so dass $\mathrm{relpos}(\Lambda_{i-1}, \Lambda_i) = \alpha(i)$ und $\mathrm{relpos}(\Lambda_0, \Lambda_m) = \gamma$.

Bestehen $\alpha(1), \ldots, \alpha(m)$ und γ nur aus nicht-negativen ganzen Zahlen und ist $q \geqslant \max\{\alpha_1(1), \ldots, \alpha_1(m), \gamma_1\}$, so sind (1) bis (4) äquivalent zu:

(5) Die Klasse σ_γ erscheint in dem Produkt $\prod_{s=1}^{m} \sigma_{\alpha(s)}$ in $H^\bullet(\mathrm{Grass}_n(\mathbb{C}^{n+q}), \mathbb{Z})$ mit einem von Null verschiedenen Koeffizienten.

Zum Beweis

Der Beweis kann in den folgenden Schritten geführt werden:

1. Schritt: Beweis der Äquivalenz von (1) und (2). Die Beweismethoden stammen aus der geometrischen Invariantentheorie oder der symplektischen Geometrie.

2. Schritt: Beweis, dass für $\alpha(1), \ldots, \alpha(m)$ und γ in $\mathbb{Z}^n$ (2) äquivalent ist zu:

(3') *Es existiert eine ganze Zahl $N \geqslant 1$, so dass die Darstellung $V(N\gamma)$ Summand von $V(N\alpha(1)) \otimes \ldots \otimes V(N\alpha(m))$ ist.*

Die Beweismethoden stammen aus der symplektischen Geometrie und der geometrischen Invariantentheorie.

3. Schritt: Beweis der Äquivalenz von (3) und (3′). Dies ist die sogenannte "Saturiertheits-Vermutung". Der Beweis kann rein kombinatorisch geführt werden (siehe [KT1], [Bu] und [KTW]).

4. Schritt: Beweis der Äquivalenz von (3) und (4). Auch hier kann der Beweis rein kombinatorisch geführt werden (siehe [Fu] Prop. 4 und die dort angegebenen Referenzen für den Beweis einer leichten Umformulierung dieser Äquivalenz).

5. Schritt: Beweis der Äquivalenz von (3) und (5). Dies ist mindestens seit 1947 bekannt und folgt aus dem Isomorphismus des Grothendieck-Rings der Kategorie der endlich-dimensionalen polynomialen Darstellungen von $GL_n(\mathbb{C})$ mit dem Ring R_n der symmetrischen Polynome, unter dem die Isomorphieklasse von $V(\alpha)$ mit dem Schurpolynom $s_\alpha \in R_n$ identifiziert wird, und elementarer Schnitttheorie in $H^\bullet(\mathrm{Grass}_n(\mathbb{C}^{n+q}), \mathbb{Z})$, die beweist, dass man einen Ring-Homomorphismus $R_n \to H^\bullet(\mathrm{Grass}_n(\mathbb{C}^{n+q}), \mathbb{Z})$ hat, der s_α auf σ_α schickt.

Einen etwas geometrischeren Ansatz kann man in [Be] finden.

Die Schritte (3) und (4) kann man auch mit Hilfe des Satake-Isomorphismus für gewisse Hecke-Algebren und Bruhat-Tits-Theorie zeigen (siehe [KLM]).

Alle vier Probleme besitzen natürliche Verallgemeinerungen auf beliebige reduktive Gruppen statt $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, siehe [KLM] und [KM].

Im Workshop werden wir uns auf die nicht-kombinatorischen Beweisschritte 1 und 2 konzentrieren.

1. Vortrag: Überblick (75 Minuten)

In diesem Vortrag sollen die obigen vier Probleme benannt und die obigen Beweisschritte angegeben werden. Es wäre schön, wenn der Vortragende auch kurz etwas zur Geschichte (z.B. zur Hornschen Vermutung) oder/und zu weiteren Varianten sagen könnte. Als Literaturquelle ist hierfür der Artikel von [Fu] geeignet.

2. Vortrag: Symplektische Geometrie und die Momenten-Abbildung
(45 Minuten)

In diesem Vortrag sollen kurz die Grundbegriffe der symplektischen Geometrie angesprochen werden. Wir richten uns im Wesentlichen nach [Kn] (siehe auch [MFK] und [MS]).

Die Quelle [Kn] ist an manchen Stellen übermäßig elementar und muss wahrscheinlich zum besseren Verständnis umformuliert werden. Gebracht werden soll in jedem Fall:

– Definition symplektischer Mannigfaltigkeiten (in Termen von de Rham Formen) und Darboux's Theorem (ohne Beweis)
– Beispiele symplektischer Mannigfaltigkeiten: $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ und glatte projektive Untervarietäten vom $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, coadjungierte Orbiten
– Definition der Momenten-Abbildung und die vier Fakten auf Seite 4 von [Kn].
– Symplektische Quotienten und der Satz von Marsden-Weinstein (höchstens mit Beweisskizze).

3. Vortrag: Geometrische Invariantentheorie (60 Minuten)

In diesem Vortrag soll zuerst eine ganz kurze Einführung in die geometrische Invariantentheorie gegeben werden, so weit wir sie brauchen. Uns genügt die folgende Situation: Sei $G = GL_n(\mathbb{C})$ oder $G = SL_n(\mathbb{C})$, sei $\rho\colon G \to GL(V)$ eine lineare Darstellung, so dass wir eine Operation von G auf $\mathbb{P}(V)$ erhalten, und sei $X \subset \mathbb{P}(V)$ eine glatte projektive Untervarietät, die G-äquivariant ist. In diesem Fall sollen möglichst elementar Stabilität, Semistabilität und Polystabilität für Punkte $x \in X$ und der GIT-Quotient $X//G$ definiert werden (siehe z.B. [To] §3, [Kn] §6 und natürlich [MFK]). Weiter soll die Äquivalenz von symplektischen und GIT-Quotienten ([Kn] 6.4 und [MFK] Theorem 8.3) erklärt werden (ohne Beweis des Satzes von Kempf und Ness). Als Anwendung soll dann der 2. Schritt (also die Äquivalenz von (1) und (3′)) bewiesen werden ([Kn] §7-8, siehe auch [Fu] 8). Der Einfachheit halber sollte man sich hierfür auf den Fall $m = 3$ und $\gamma = (0 \geqslant 0 \geqslant 0 \ldots \geqslant 0)$ (also den in [Kn] behandelten Fall) beschränken.

4. Vortrag: Die Ungleichungen sind notwendig (30 Minuten)

In diesem Vortrag geht es um den Beweis der Implikation "(2) $\Rightarrow$ (1)". Hierfür folgen wir [Fu] Prop. 1 und der ersten Hälfte von Prop. 7. Dazu müssen ein paar elementare Fakten aus dem Schubert-Kalkül wiederholt werden ([Fu] Ende von §4). Außerdem müssen die Argumente leicht umformuliert werden, um wirklich im Fall unseres Hauptsatzes zu sein. Alternativ kann man sich auf den Fall beschränken, dass $\gamma = (\gamma_1 = \ldots = \gamma_n)$ (also C eine Skalarmatrix) ist.

5. Vortrag: Die Ungleichungen sind hinreichend (45 Minuten)

In diesem Vortrag geht es um den Beweis der Implikation "(1) $\Rightarrow$ (2)". Wir richten uns nach [Fu] § 7, Prop. 6, Lemma 1–3 und Prop. 7 und nach [To]. Wieder müssen die Argumente leicht umformuliert werden, oder man muss sich auf den Fall beschränken, dass $\gamma = (\gamma_1 = \ldots = \gamma_n)$ (also C eine Skalarmatrix) ist.

Referenzen

[Be] P. Belkale: *Invariant Theory of* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *and Intersection Theory of Grassmannians*, Int. Math. Res. Not. 2004 **69**, 3709–3721

[Bu] A.S. Buch: *The saturation conjecture (after A. Knutson and T. Tao)*, with an appendix by W. Fulton, Enseign. Math. (2) **46** (2000), no. 1-2, 43–60, arXiv:math.CO/9810180 v1

[Fu] W. Fulton: *Eigenvalues, invariant factors, highest weights, and Schubert calculus*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **37** (2000), no. 3, 209–249, arXiv:math.AG/9908012 v3

[KLM] M. Kapovich, B. Leeb, J.J. Millson: *The generalized triangle inequalities in symmetric spaces and buildings with applications to algebra*, preprint 2004, arXiv:math.RT/0210256 v3

[KM] M. Kapovich, J.J. Millson: *A path model for geodesics in Euclidean buildings and its applications to representation theory*, arXiv:math.RT/0411182 v1

[Kn] A. Knutson: *The symplectic and algebraic geometry of Horn's problem*, Linear Algebra Appl. **319** (2000), no. 1-3, 61–81, arXiv:math.RA/9911088 v2

[KT] A. Knutson, T. Tao: *The honeycomb model of* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *tensor products I. Proof of the saturation conjecture*, J. Amer. Math. Soc. **12** (1999), no. 4, 1055–1090, arXiv: math.RT/9807160

[KTW] A. Knutson, T. Tao, C. Woodward: *The honeycomb model of* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *tensor products II. Puzzles determine facets of the Littlewood-Richardson cone*, J. Amer. Math. Soc. **17** (2004), no. 1, 19–48, arXiv:math.CO/0107011

[MFK] D. Mumford, J. Fogarty, F. Kirwan: *Geometric invariant theory*, 3rd edition, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2) **34**, Springer 1994

[MS] D. McDuff, D. Salomon: *Introduction to Symplectic Topology*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press 1995

[To] B. Totaro: *Tensor products of semistables are semistable*, Geometry and analysis on complex manifolds (edited by T. Mabuchi, J. Noguchi and T. Ochiai), 242–250, World Sci. Publishing 1994