Einfache Singularitäten

19. Januar 2002, Köln

Thema des Workshops sind einfache Singularitäten, d.h. rationale Doppelpunkte von Flächen. Im ersten Teil (Vorträge eins und zwei) werden diese mit ihren grundlegenden Eigenschaften vorgestellt, insbesondere die Klassifikation durch Dynkin-Diagramme der Typen A,D,E.

Man kann jede einfache Singularität mitsamt ihrer semiuniversellen Deformation in der einfachen Lie-Algebra mit dem gleichen Diagramm wiederfinden – nämlich in einem transversalen Schnitt zum subregulären Orbit. Das zu erklären, ist Gegenstand der Vorträge drei bis fünf. Ein Ergebnis dieser Konstruktion ist eine genaue Angabe, wozu sich eine einfache Singularität deformieren läßt.

1. Vortrag: Rationale Singularitäten (50 min.)

Hier behandeln wir einige grundlegende Dinge über rationale Singularitäten, wie sie im Artikel [A1] von Artin erklärt werden, insbesondere: Definition rationaler Singularitäten, und dann Prop. 1, Prop. 2, der Fundamentalzykel, Thm. 3, Cor. 6.

2. Vortrag: Rationale Doppelpunkte (50 min.)

Wir richten uns nach dem Übersichtsartikel [D] von Durfee, beschränken uns aber auf die Charakterisierungen A1–A5 (inklusive A3', A5').

Nach den Vorarbeiten aus dem ersten Vortrag sollte es möglich sein, viele der Äquivalenzen zu beweisen (bis auf A4).

3. Vortrag: Die Singularitäten des subregulären Orbits in der Lie-Algebra. Einführung (30 min.)

Wir folgen für die letzten drei Vorträge dem Skript [S1] von Slodowy, von dem wir die ersten drei Kapitel behandeln, und zwar im wesentlichen ein Kapitel pro Vortrag. Detaillierter (aber auch viel technischer) sind diese Sachen auch in Slodowys Buch [S2] aufgeschrieben, das zur Vortragsvorbereitung auch nützlich sein mag.

In diesem Vortrag geht es also um [S1], Kapitel I, in dem einfache Singularitäten eingeführt werden und die Ergebnisse beschrieben werden.

Einiges hiervon haben wir schon gesehen, so daß es im Grunde nur noch um 1.3, 1.4 und 1.5 geht. Die Abschnitte 1.6, 1.8 und 1.9 brauchen wir nicht, und 1.7 behandeln wir im 4. Vortrag.

Dafür sollten möglichst noch einige Worte zur Existenz der semiuniversellen Deformation gesagt werden (vgl. zum Beispiel [A2]). Außerdem soll in jedem Fall das Beispiele sl_n ausführlich behandelt werden.

4. Vortrag: Die Singularitäten des subregulären Orbits in der Lie-Algebra I. (60 min.)

Im wesentlichen geht es hier um [S1], Kapitel II.

Wir verschieben aber Abschnitt 2.1 und den Beweis des Korollars von Seite 12 in den fünften Vortrag und machen 2.2–2.5, 2.7, 2.8. Außerdem muß noch Abschnitt 1.7 nachgeholt werden.

Die Tabelle auf Seite 25 sollte ohne Beweis zitiert werden. Es geht uns hier mehr um das grundlegende Beweisprinzip als um die Rechnungen. Da wir im letzten Vortrag noch einen anderen Weg für die Identifikation der Singularitäten kennenlernen, verzichten wir auch auf den Beweis des Lemmas auf Seite 27; es sollte (wie es auch im Skript gemacht wird) einfach zitiert werden.

5. Vortrag: Die Singularitäten des subregulären Orbits in der Lie-Algebra II. (60 min.)

Schließlich kommen wir zu Kapitel III. Außerdem müssen noch ein paar Bemerkungen über Assoziierte Bündel (aus Abschnitt 2.1) nachgetragen werden, und (nach 3.3) sollte kurz der Beweis des Korollars über die Singularitäten der nicht-speziellen Fasern erläutert werden.

Es wäre schön, wenn zur Bestimmung der exzeptionellen Faser etwas mehr gesagt werden könnte als im Skript, wo einfach nur Steinbergs Buch [St] zitiert wird. Die entscheidenden Sätze sind Proposition 1 (Seite 130) und Proposition 2 (Seite 148) in [St]. Vielleicht lassen sich die Beweise dazu skizzieren (das für Prop. 2 benötigte Lemma 1 (Seite 140) brauchen wir nur im 'senkrechten' und im 'A2' Fall). In [S2] wird auf Seite 87 das Beispiel sl_n durchgeführt.

Literatur

[A1] Artin, M., *On isolated rational singularities of surfaces*, Amer. J. Math. 88, 129–136 (1966)

[A2] Artin, M., *Lectures on deformations of singularities*, Tata Insitute Bombay (1976)

[D] Durfee, A. H., *Fifteen characterizations of rational double points and simple critical points*, Ens.Math. 25, 131–163 (1979)

[S1] Slodowy, P., *Four lectures on simple groups and singularities*, Communications of the Mathematical Institute, Rijksuniv. Utrecht, Vol. 11 (1980). *Bei Bedarf schicken wir gerne eine Kopie dieses Skripts zu; Email genügt.*

[S2] Slodowy, P., *Simple Singularities and Simple Algebraic Groups*, Springer Lecture Notes in Mathematics 815 (1980)

[St] Steinberg, R., *Conjugacy Classes in algebraic groups*, Springer Lecture Notes in Mathematics 366 (1974)