# PROGRAMM ZUM WORKSHOP ÜBER KOHOMOLOGIE VON DRINFELDMODUL-VARIETÄTEN

## am 18.1.03 in Köln

Sei $F$ ein globaler Körper der Charakteristik $p$, und sei $X$ die Kurve über $\mathbb{F}_p$ mit Funktionenkörper $F$. Drinfeld hat für positive ganze Zahlen $d$ ein Schema $M^d$ über $X$ definiert, das ein Modulraum sogenannter Drinfeldmoduln ist. In diesem Workshop soll es um die ($\ell$-adische) Kohomologie (mit kompaktem Träger) der generischen Faser von $M^d$ gehen. Diese Kohomologie trägt zum einen die Struktur eines $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$-Moduls, zum anderen ist es ein Modul unter $GL_d(\mathbb{A}^\infty)$ wobei $\mathbb{A}^\infty$ der Ring der Adele von $F$ außerhalb einer fixierten Stelle $\infty$ ist. Das genaue Studium dieser Kohomologie erlaubt es, einen Spezialfall der globalen Langlandskorrespondenz für den Funktionenkörperfall zu beweisen (der allgemeine Fall ist inzwischen von Lafforgue bewiesen worden).

Der wesentliche Punkt im Beweis der Langlandskorrespondenz ist dabei die Beschreibung des virtuellen $\bar{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \times GL_d(\mathbb{A}^\infty)]$-Moduls

$$\sum_n (-1)^n H_c^n(\bar{F} \otimes_F M^d, \mathbb{Q}_\ell)$$

durch automorphe Darstellungen von $GL_d(F)$. Dies geschieht, grob gesprochen, in vier Schritten:

- Benutze die Gorthendieck-Lefschetz Spurformel, um die Spur dieses virtuellen Moduls durch die Anzahl von Fixpunkten auszudrücken.
- Berechne die Anzahl der Fixpunkte in Termen von Orbitalintegralen.
- Vergleiche diese Orbitalintegrale mit der geometrischen Seite einer geeigneten Arthur-Selberg Spurformel.
- Berechne explizit die Spektralseite der Arthur-Selberg Spurformel.

Dies ganze Programm füllt die beiden Bücher von Laumon [La] und ist daher bei weitem zu ambitioniert für einen einzelnen Workshop. Wir werden uns daher auf einen Übersichtsvortrag beschränken, der die wesentlichen Schritte auf dem Weg zum Beweis (des Spezialfalls) der Langlandskorrespondenz, darstellt, und danach die einen Aspekt, nämlich dem des Zählens der Punkte, genauer betrachten.

Als Referenz werden wir durchgehend [La] benutzen.

**1. Vortrag: Drinfeldmodul-Varietäten und ihre Kohomologie** (50 Minuten)

In diesem Vortrag sollen die grundlegenden Begriffe definiert werden: Drinfeldmodul-Varietäten und die Galois- und Heckeoperation auf ihrer Kohomologie.

(1) Definition von Drinfeldmoduln und von Levelstrukturen (1.2) und (1.3) (Resultate aus 1.1 sollten zitiert aber nicht bewiesen werden, in jedem Fall brauchen wir aber die Beschreibung von $\mathrm{End}(\mathbb{G}_{a,k})$ mit Hilfe des Rings $k[\tau]$).

(2) Definiere das projektive System $(M_I^d)_I$ der Drinfeldmodul-Varietäten (1.4), skizziere das Argument, dass sie für $I \neq A$ darstellbar sind und bringe den Satz, dass sie glatt über $X$ sind (1.5, ohne Beweis).
(3) Definition der Hecke-Korrespondenzen (1.6) und (1.7), dies sollte so ausführlich wie möglich gemacht werden.

**2. Vortrag: Übersichtsvortrag** (60 Minuten)

Ziel dieses Vortrags ist es, die wesentlichen Schritte auf dem Weg der Beweises der Langlandskorrespondenz zu erläutern. Notgedrungen kann hier nur ein genereller Eindruck vermittelt werden. Wahrscheinlich ist es nicht einmal möglich alle auftretenden Bezeichnungen präzise zu erklären.

(1) Erklärung der Deligne-Vermutung (bzw. des Satzes von Fujiwara) 12.1.4 und ihre Anwendung auf die Drinfeldmodul-Varietäten (12.2 mit 12.2.8 als Hauptresultat).
(2) Drücke $\mathrm{Lef}_r(f^{\infty,o})$ mit Hilfe von Orbitalintegralen aus (6.1). Dies geschieht in drei Schritten: Beschreibe die Punkte von $M_I^d$, dann drücke mittels dieser Beschreibung $\mathrm{Lef}_r(f^{\infty,o})$ in Termen von Orbital- und getwisteten Orbitalintegralen aus. Schließlich müssen noch die getwisteten Orbitalintegrale durch gewöhnliche Orbitalintegral ersetzt werden (Fundamentales Lemma). Diese Schritte sollten kurz angesprochen worden, ohne sie durch Formeln genauer zu beschreiben. Der erste dieser Schritte wird in den Vorträgen 3 – 5 genauer erläutert werden.
(3) Anwenden der Arthur-Selberg Spurformel beschreibt dann $\mathrm{Lef}_r(f^{\infty,o})$ durch automorphe Darstellungen (12.3.1, wobei die vorkommenden Bezeichnungen nur kurz erläutert werden sollen).
(4) Formulierung der Langlandskorrespondenz und der Ramanujan-Peterson-Vermutung und eine Beweisskizze (12.4).

In den nächsten drei Vorträgen sollen nun die Punkte von $M_I^d$ mit ihrer Operation von Frobenius und Hecke-Algebra beschrieben werden.

**3. Vortrag: Beschreibung der Isogenieklassen von Drinfeldmoduln** (60 Minuten)

In diesem Vortrag soll es darum gehen, die Menge der Isogenieklassen von Drinfeldmoduln mit der Menge der Weil-Paare zu identifizieren. Dies geschieht analog zur Honda-Tate Theorie für abelsche Varietäten. Das Ziel des Vortrages sind 2.2.2 und 2.2.3.

(1) Kurze Einleitung, um was es in Vortrag 3 bis 5 geht (2.0).
(2) Isogenien von Drinfeldmoduln und die Beschriebung des Endomorphismenrings eines Drinfeldmoduls (2.1).
(3) Beschreibung der Isogenieklassen durch Weil-Paare (2.2, dabei sollte von 2.2.2 so viel wie möglich bewiesen werden).

**4. Vortrag: Tate- und Dieudonné-Moduln von Drinfeldmoduln** (50 Minuten)

Ist ein Drinfeldmodul fixiert, so kann man seine Isogenieklasse mittels seines Tate- und seines Dieudonné-Modules beschreiben. In diesem Vortrag sollen daher Tate- und Dieudonné-Moduln definiert werden.

(1) Definition des Tate-Modules eines Drinfeldmoduls (2.3, bei 2.3.3 den Teil (i) beweisen, letztendlich benötigen wir vor allem das Korollar 2.3.4).
(2) Definiere das $\varpi_o$-divisible Schema eines Drinfeldmoduls (2.5.1) und erkläre dann allgemein, was ein $\varpi_o$-divisibles $k$-Schema in $\mathcal{O}_o$-Moduln ist (2.4.8).
(3) Äquivalenz der Kategorien der $\varpi_o$-divisible Schemata in $\mathcal{O}_o$-Moduln mit der Kategorie der Dieudonné-$\mathcal{O}_o$-Moduln (2.4.14) und die Klassifikation von Dieudonné-$F_o$-Moduln (2.4.5) (alles ohne Beweis).
(4) Die Sätze 2.5.6 und das Korollar 2.5.8 (mit möglichst viel Beweis).

**5. Vortrag: Beschreibung einer Isogenieklasse** (50 Minuten)

Das Ziel des Vortrags ist die Beschreibung einer Isogenieklasse samt der Operation von Frobenius und Hecke-Algebra auf ihr durch eine Doppelnebenklasse von $GL_d(\mathbb{A}^{\infty,o})$. Wir folgen dabei 2.6 und 2.7. Das Hauptresultat ist der Satz 2.7.2.

**Bibliographie**

(1) [La] G. Laumon: *Cohomology of Drinfeld Modular Varieties*, Part I,II, Cambridge studies in advanced mathematics **41**, **56**, 1996 und 1997.