Äquivalenzen zwischen derivierten Kategorien kohärenter Garben

Programm für die kleine Arbeitsgemeinschaft am 17. 4. 04 in Bonn

Zusammenfassung

Diese Arbeitsgemeinschaft wird sich mit den derivierten Kategorien $D^b(X)$ kohärenter Garben auf glatten Varietäten X und ihren Autoäquivalenzen beschäftigen. Ausgangspunkt ist der folgende Satz von Bondal und Orlov:

Satz 1 *Ist das kanonische oder das antikanonische Bündel von X ampel, und ist $D^b(X) \cong D^b(X')$, dann ist schon $X \cong X'$.*

Der Satz wird bewiesen, indem in der derivierten Kategorie die an einem Punkt konzentrierten Wolkenkratzergarben charakterisiert werden, dann die Geradenbündel. Schließlich kann durch die Geradenbündel auch die Zariskitopologie rekonstruiert werden.

Eine weitere Folgerung aus dem Beweis ist eine explizite Beschreibung aller Autoäquivalenzen von $D^b(X)$.

Im zweiten Teil der AG geht es um (Auto-)Äquivalenzen derivierter Kategorien kohärenter Garben in dem Fall, dass die Voraussetzung des Satzes nicht gegeben ist. Funktoren zwischen $D^b(X)$ und $D^b(Y)$ werden dann, analog zu Korrespondenzen zwischen Zykeln in X und Y, aus Objekten in $D^b(X \times Y)$ konstruiert. Es gibt sehr explizite Kriterien, wann ein so konstruierter Funktor eine Äquivalenz von Kategorien liefert. Insbesondere im Fall, dass das kanonische Bündel trivial ist (also im genau entgegengesetzten Fall zu Satz 1), findet sich eine reiche Struktur von Autoäquivalenzen.

1. Vortrag: Serre-Funktoren (50 Minuten)

Zunächst soll kurz an die Definition der derivierten Kategorie kohärenter Garben $D^b(X)$ einer Varietät X erinnert werden. Dabei sei X stets eine glatte Varietät über einem beliebigem Körper k. Der derivierte Funktor (und seine Verträglichkeit mit Komposition) soll erwähnt werden; außerdem benötigen wir für später einige klassische Sätze in Versionen für $D^b(X)$, wie die Projektionsformel oder den (flachen) Basiswechselsatz: [Har66, II.5.1, II.5.3, II.5.6 und II.5.12].[1]

Sei nun $\omega_X = \Omega_X^n$. Es soll gezeigt werden, wie aus der bekannten Serre-Dualität $\mathrm{Ext}^i(F,G) = \mathrm{Ext}^{n-i}(G, F \otimes \omega_X)$ die Serre-Dualität für die derivierte Kategorie folgt, also dass $(.) \otimes \omega_X[n]$ ein *Serre-Funktor* ist.

Wir defnieren abstrakte Serre-Funktoren ([BO01, Definition 1.2]), und beweisen Proposition 1.3 und 1.5 aus [BO01]: Ein Serre-Funktor ist im Wesentlichen eindeutig bestimmt und kommutiert mit Autoäquivalenzen.

Intrinsisch in der derivierten Kategorie lassen sich *Punktobjekte* ([BO01, Definition 2.1]) einführen. Im Fall, dass X eine glatte Varietät und $\omega_X^{\pm 1}$ ampel ist, sind dies bis auf Gradverschiebung genau die Wolkenkratzergarben der abgeschlossenen Punkte von X ([BO01, Proposition 2.2]).

2. Vortrag: $X \cong X'$ falls $D^b(X) \cong D^b(X')$ (50 Minuten)

Analog sollen dann *invertierbare Objekte* ([BO01, Definition 2.3]) von $D^b(X)$ eingeführt werden. Auch diese sind intrinsisch beschreibbare Objekte von $D^b(X)$, und es soll gezeigt werden, daß diese (im Fall $\omega_X^{\pm 1}$ ampel) bis auf Gradverschiebung die Geradenbündel sind ([BO01, Proposition 2.4]).

[1] Wir schlagen vor, lediglich den Basiswechselsatz zu beweisen.

Wir beweisen nun Satz 1. Die Beweisstrategie ist dabei die folgende: Wir können zunächst die abgeschlossenen Punkte und die Geradenbündel beider Varietäten identifizieren, und erhalten jeweils eine 1:1-Zuordnung zwichen ihnen. Aufgrund der Existenz globaler Auflösungen kann man auch die Zariski-Topologie aus der derivierten Kategorie rekonstruieren. Da der Serre-Funktor fast eindeutig ist, kann man oBdA $\omega_X = \omega_{X'}$ annehmen. Daraus und aus Identifikation der Zariski-Topologie auf X und X' folgt, dass $\omega_{X'}^{\pm 1}$ ebenfalls ampel ist, und man kann dann die beiden Varietäten via $X = \operatorname{Proj} \operatorname{Hom}_X(\mathcal{O}_X, \omega_X^i) \cong \operatorname{Proj} \operatorname{Hom}_{X'}(\mathcal{O}_{X'}, \omega_{X'}^i) = X'$ identifizieren.

3. Vortrag: Die Gruppe der Autoäquivalenzen (40 Minuten)

Bewiesen werden soll der folgende

Satz 2 *Sei X eine glatte irreduzible Varitetät mit $\omega_X^{\pm 1}$ ampel, und* $\operatorname{Aut} D^b(X)$ *die Gruppe der Autoäquivalenzen modulo Isomorphie (von Funktoren). Dann ist*

$$\operatorname{Aut} D^b(X) \cong \operatorname{Aut} X \ltimes (\operatorname{Pic} \oplus \mathbb{Z}).$$

Aus den bisherigen Ergebnissen kann gezeigt werden, dass man eine Autoäquivalenz $F\colon D^b(X) \to D^b(X)$ durch ein Element in $\operatorname{Aut} X \ltimes (\operatorname{Pic} \oplus \mathbb{Z})$ so abändern kann, dass $F(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_X$, allgemeiner $F(\omega_X^i) = \omega_X^i, i \in \mathbb{Z}$ und $F(a) = \lambda^i a$ für ein festes $\lambda \in k$ und alle $a \in \operatorname{Hom}(\mathcal{O}_X, \omega_X^i)$ gilt. Der Beweis, dass ein solcher Funktor bereits isomorph zur Identität ist, soll im Rahmen der zur Verfügung stehenden Zeit nur skizziert werden.

4. Vortrag: Fourier-Mukai-Transformationen (50 Minuten)

Seien X und Y glatte Varietäten über einem Körper und $\mathcal{P} \in D^b(X \times Y)$. Dann definiert man die *Fourier-Mukai-Transformation* $\Phi_{\mathcal{P}}$ von $D^b(Y)$ nach $D^b(X)$ als

$$\Phi_{\mathcal{P}}(-) := R\pi_{X,*}(\mathcal{P} \overset{L}{\otimes} L\pi_Y^*(-)) : D^b(Y) \to D^b(X)$$

Die Verkettung zweier solcher Transformationen ist wieder eine Fourier-Mukai-Transformation wie in [Muk81, Proposition 1.3] bewiesen. Dies folgt im wesentlichen aus Basiswechselsätzen und der Projektionsformel für derivierte Kategorien.

Sei nun A eine abelsche Varietät und $\mathcal{P}$ das normalisierte Poincaré-Bündel auf $A \times \hat{A}$. Dann induziert $\Phi_{\mathcal{P}}$ eine Äquivalenz von Kategorien zwischen $D^b(A)$ und $D^b(\hat{A})$ wie in [Muk81, Theorem 2.2] gezeigt.

Als nächstes soll definiert werden, was es für ein Vektorbündel $\mathcal{P}$ über einem Produkt $X \times Y$ bedeutet, *stark einfach über* Y zu sein ([Bri99]).

Schliesslich soll erste Teil des folgenden Satzes gezeigt werden:

Satz 3 *Seien X und Y glatte und projektive Varietäten über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik 0. Sei $\mathcal{P}$ ein Vektorbündel über $X \times Y$.*

1. *Der Funktor $\Phi_{\mathcal{P}}$ ist genau dann volltreu, wenn $\mathcal{P}$ stark einfach über Y ist.*
2. *Ist $\Phi_{\mathcal{P}}$ ein volltreuer Funktor, so induziert er genau dann eine Äquivalenz von Kategorien, wenn $\mathcal{P}_y = \mathcal{P}_y \otimes \omega_X$ für alle $y \in Y$ erfüllt ist.*

Dazu wird als erstes der Begriff einer *aufspannenden Klasse* einer Kategorie eingeführt. Es sollte erwähnt werden, dass die Wolkenkratzergarben $\{\mathcal{O}_x, x \in X\}$ die Kategorie $D^b(X)$ aufspannen. Um festzustellen, ob ein Funktor zwischen triangulierten Kategorien volltreu ist, gibt [Bri99, Theorem 2.3] nun ein Kriterium, das man auf einer aufspannenden Klasse überprüfen kann.

Danach zeigt [Bri99, Proposition 4.2], dass Fourier-Mukai-Transformationen Familien von Garben respektieren. Allgemein interessant aber auch wichtig im folgenden ist das Lemma [Bri99, Lemma 4.4], das die Kodaira-Spencer-Abbildung durch die Fourier-Mukai-Transformation beschreibt.

Ferner folgt aus der Serre-Dualität, dass eine Fourier-Mukai-Transformation sowohl einen linksadjungierten wie einen rechtsadjungierten Funktor besitzt, den man explizit hinschreiben kann ([Bri99, Lemma 4.5]).

Nach diesen technischen Vorarbeiten ist es nun nicht mehr allzu schwer zu bestimmen, wann eine Fourier-Mukai-Transformation ein volltreuer Funktor ist ([Bri99, Theorem 5.1]). Bei dem Beweis reicht es sicherlich, Aussagen wie das [Bri99, Lemma 4.3] und die zitierte [BO95, Proposition 1.5] zu glauben. Auch die Existenz eines Hilbertschemas darf wohl als bekannt vorausgesetzt werden.

5. Vortrag: Äquivalenzen zwischen derivierten Kategorien (50-60 Minuten)

In diesem Vortrag wird zunächst der zweite Teil von Satz 3 bewiesen, der genau charakterisiert, wann ein Fourier-Mukai-Funktor eine Äquivalenz von Kategorien ist.[2] Satz 3.3 beschreibt dabei etwas allgemeiner, wann genau ein Funktor in eine *unzerlegbare triangulierte Kategorie* eine Äquivalenz induziert. Satz 2.2 aus [Orl97] besagt, dass man auch alle Äquivalenzen als Fourier-Mukai-Funktor erhält.[3]

Die Bedingungen des Satzes machen es im Falle von $\omega_X = \mathcal{O}_X$ besonders leicht, Äquivalenzen zwischen derivierten Kategorien zu konstruieren. Ein Beispiel ist die Fourier-Mukai-Transformation, die durch die Idealgarbe $\mathcal{I}_\Delta$ der Diagonale $\Delta \subset X \times X$ gegeben ist.[4] Dies ist ein Spezialfall einer allgemeiner Konstruktion von Paul Seidel und Richard Thomas [ST01, Abschnitt 2 und 3]: Hat $E \in D^b(X)$ die Eigenschaft $\mathrm{RHom}(E, E) \cong k \oplus k[-n]$ (man nennt E dann ein sphärisches Objekt), dann ist der Funktor

$$F \mapsto \mathrm{cone}\,(\mathrm{RHom}(E, F) \otimes E \to F)$$

eine Autoäquivalenz von $D^b(X)$.[5] Eine Auswahl der Beispiele aus [Tho01, S. 371f] wäre schön.

Die einfachsten Gegenbeispiele zu Satz 1 ohne die Voraussetzung über ω_X sind wohl Orlovs Ergebnisse über abelsche Varietäten ([Orl02]) und K3-Flächen. Satz 3.3 in [Orl97] liefert eine explizite Chrakterisierung von K3-Flächen mit äquivalenter derivierter Kategorie über ihre Hodge-Struktur. Der eine Teil dieser Beschreibung (Satz 3.11) lässt sich dank des Kriteriums von Bridgeland[6] relativ leicht beweisen, wenn man bereit ist, einige klassische Ergebnisse (starker Torellisatz, Eigenschaften des Mukai-Gitters, Existenz eines Modulraums stabiler Vektorbündel) über K3-Flächen zu glauben.

Literatur

[BO95] A. Bondal and D. Orlov, *Semiorthogonal decompositions for algebraic varieties*, math.AG/9506012.

[BO01] Alexei Bondal and Dmitri Orlov, *Reconstruction of a variety from the derived category and groups of autoequivalences*, Compositio Math. **125** (2001), no. 3, 327–344, alg-geom/9712029. MR 2001m:18014

[Bri99] Tom Bridgeland, *Equivalences of triangulated categories and Fourier-Mukai transforms*, Bull. London Math. Soc. **31** (1999), no. 1, 25–34, math.AG/9808114. MR 99k:18014

[Har66] Robin Hartshorne, *Residues and duality*, Lecture notes of a seminar on the work of A. Grothendieck, given at Harvard 1963/64. With an appendix by P. Deligne. Lecture Notes in Mathematics, No. 20, Springer-Verlag, Berlin, 1966. MR 36 #5145

[Muk81] Shigeru Mukai, *Duality between $D(X)$ and $D(\hat{X})$ with its application to Picard sheaves*, Nagoya Math. J. **81** (1981), 153–175. MR 82f:14036

[Orl97] D. O. Orlov, *Equivalences of derived categories and $K3$ surfaces*, J. Math. Sci. (New York) **84** (1997), no. 5, 1361–1381, alg-geom/9606006. MR 99a:14054

[2] Also aus [Bri99] Abschnitt 3 und Satz 5.4.

[3] Aus Zeitgründen schlagen wir vor, den Satz ohne Beweis anzugeben.

[4] Da dabei die Wolkenkratzergarbe eines abgeschlossenen Punktes $x \in X$ auf die Idealgarbe $\mathcal{I}_x$ abgebildet wird, ist auch klar, dass eine Charakterisierung der Wolkenkratzergarben intrinsisch in der derivierten Kategorie wie im ersten Vortrag im Allgemeinen unmöglich ist.

[5] Die Konstruktion ist sehr übersichtlich beschrieben in [Tho01, Abschnitt 4], die Originalreferenz [ST01] wird wahrscheinlich höchstens für Details benötigt.

[6] Es ersetzt vollständig den Teil des Beweises, der zeigt, dass $\Phi_\mathcal{E}$ wirklich eine Äquivalenz ist.

[Orl02] ———, *Derived categories of coherent sheaves on abelian varieties and equivalences between them*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **66** (2002), no. 3, 131–158. MR 2004b:14027

[ST01] Paul Seidel and Richard Thomas, *Braid group actions on derived categories of coherent sheaves*, Duke Math. J. **108** (2001), no. 1, 37–108, math.AG/0001043. MR 2002e:14030

[Tho01] R. P. Thomas, *Mirror symmetry and actions of braid groups on derived categories*, Winter School on Mirror Symmetry, Vector Bundles and Lagrangian Submanifolds (Cambridge, MA, 1999), AMS/IP Stud. Adv. Math., vol. 23, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001, pp. 363–377. MR 2002m:18010