Degeneration von Hodgestrukturen

Programm für den Workshop am 24. 1. 04 in Bonn

Zusammenfassung

Sei $\pi\colon X \to \Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ eine Familie projektiver Varietäten, die glatt über $\Delta^* = \{z \in \mathbb{C}| \ 0 < |z| < 1\}$ ist. Auf der Kohomologie einer glatten Faser X_t, $t \in \Delta^*$, gibt es die Hodge-Zerlegung $H^n(X_t) = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}(X_t)$. Da die Kohomologie benachbarter Fasern durch den Gauß-Manin-Zusammenhang kanonisch identifiziert wird, können wir von der Variation dieser Zerlegung sprechen. Diese (und andere) Information ist in der zugehörigen *Variation von Hodgestrukturen* zusammengefasst.

Auf der Kohomologie einer allgemeinen Faser X_t, $t \in \Delta^*$, konstruiert Schmid in [Schm] mittels des Grenzverhaltens bei $0 \in \Delta$ eine vermischte Hodgestruktur, die so genannte *Limes-Hodgestruktur*. Nach Deligne gibt es auf der Kohomologie der singulären Faser X_0 in funktorieller Weise eine vermischte Hodgestruktur. Diese beiden vermischten Hodgestrukturen können über die lange exakte *Clemens-Schmid-Sequenz* miteinander verglichen werden.

Wir folgen weitgehend dem inzwischen klassischen Übersichtsartikel von Griffiths und Schmid [GrSchm]. Außerdem wird im letzten Vortrag eine hübsche Anwendung aus [KuKu] auf den Fall von Kurven vorgestellt.

1. Vortrag: Reine Hodgestrukturen (35 Minuten)

- Sei $H_{\mathbb{R}}$ ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $H_{\mathbb{Z}} \subset H_{\mathbb{R}}$ ein Gitter und $H = H_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Eine *Hodgestruktur* vom Gewicht m ist eine Zerlegung

$$H = \bigoplus_{p+q=m} H^{p,q}, \quad \text{mit } H^{q,p} = \bar{H}^{p,q}.$$

  Erinnere an diese Definition und die der zugehörigen *Hodge-Filtrierung*: $F^p = \bigoplus_{i \geq p} H^{i,m-i}$. Definiere *polarisierte Hodgestrukturen.* ([GrSchm, § 3 a])

- Sei V eine kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit (z.B. eine glatte projektive Varietät). Dann induziert die Zerlegung einer m-Form in ihre (p,q)-Anteile bzgl. der komplexen Struktur eine Hodgestruktur vom Gewicht m auf $H^m(V,\mathbb{C})$. Definiere den *primitiven* Anteil $P^m \subseteq H^m(V,\mathbb{C})$ als Kern einer geeigneten Potenz des *Kähler-Operators* L. Die Hodgestruktur auf $H^m(V,\mathbb{C})$ induziert eine Hodgestruktur auf P^m. Diese ist nun sogar polarisiert in obigem Sinne, und aufgrund der *Lefschetz-Zerlegung* genügt es, diese Situation zu betrachten ([GrSchm, § 2 a]).

- Als Beispiel schlagen wir vor, gemäß der Einleitung in [KuKu] den Fall elliptischer Kurven vorzuführen.

- Ist $\pi\colon X \to S$ eine glatte projektive Familie, so trägt die m-te Kohomologie jeder Faser X_s eine Hodgestruktur in obigem Sinne. Aus Halbstetigkeitsgründen sind die $F^p(X_s)$ Fasern holomorpher Untervektorbündel F^p des flachen Vektorbündels $H^m = R^m\pi_*(\mathbb{C})$ auf S. Ist $\nabla^{GM}\colon \mathcal{O}(H^m) \to \mathcal{O}(H^m \otimes T_S^*)$ der *Gauß-Manin-Zusammenhang*, so gilt

  Satz 1 (Griffith-Transversalität) $\nabla^{GM}\mathcal{O}(F^p) \subseteq \mathcal{O}(F^{p-1} \otimes T_S^*)$.

Wenn noch Zeit bleibt, skizziere einen Beweis (siehe z. B. [Voi, §1.5.]). Definiere *Variationen von Hodgestrukturen* über einer Basis S. ([GrSchm, § 3 a])

2. Vortrag: Klassifizierende Räume für Hodgestrukturen (40 Minuten)

- Definiere den *klassifizierenden Raum* D zu Hodge-Zahlen $\{h^{p,q}\}$ und illustriere hier wie im Folgenden möglichst viel für $h^{1,0} = h^{0,1} = 1$, d. h. $H_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}^2 \subset H_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$, $H = \mathbb{C}^2$, $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$, $G_{\mathbb{R}} = SL_2(\mathbb{R})$, $G_{\mathbb{C}} = SL_2(\mathbb{C})$, $U = \{w \in \mathbb{C} | \Im(w) > 0\} = D \subset \check{D} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ etc. ([GrSchm, § 3 b])
- Zu einer Variation von Hodgestrukturen über einer Basis S mit Hodge-Zahlen $\{h^{p,q}\}$ gibt es eine klassifizierende Abbildung $f \colon S \to \Gamma \backslash D$. Dies ist die sogenannte *Periodenabbildung*. Sie ist holomorph, lokal hochhebbar, und die Hochhebungen sind horizontal ([GrSchm, § 3 b]).
- Auf D gibt es eine $G_{\mathbb{R}}$-invariante hermitesche Metrik negativer holomorpher Schnittkrümmung in horizontalen Richtungen. Der Vergleich dieser (in Lemmata 3.19, 3.23) mit einer beliebigen $G_{\mathbb{C}}$-invarianten hermiteschen Metrik auf $\check{D}$ wird im Beweis des Satzes vom nilpotenten Orbit benötigt. Betrachte wieder das Beispiel der oberen Halbebene $D = U$ ([GrSchm, § 3 a]).

3. Vortrag: Vermischte Hodgestrukturen (35 Minuten)

- Eine *vermischte Hodgestruktur* auf H (wie oben) besteht aus zwei Filtrierungen: der aufsteigenden rationalen *Gewichtsfiltrierung*

  $$0 \subset \ldots \subset W_{m-1} \subset W_m \subset W_{m+1} \subset \ldots \subset H$$

  und der absteigenden *Hodge-Filtrierung*

  $$H \supset \ldots \supset F^{p-1} \supset F^p \supset F^{p+1} \supset \ldots \supset 0,$$

  mit der Eigenschaft, dass letztere auf dem Quotienten W_m/W_{m-1} der Gewichtsfiltrierung eine reine Hodgestruktur vom Gewicht m induziert. Diese bilden eine abelsche Kategorie ([GrSchm, § 1 b]).
- Nach Deligne trägt die Kohomologie mit komplexen Koeffizienten jeder (quasi-)projektiven Varietät in funktorieller Weise eine vermischte Hodgestruktur, die im projektiven, nichtsingulären Fall mit der des ersten Vortrags übereinstimmt. Wir wollen hier exemplarisch die vermischte Hodgestruktur auf der Kohomologie einer projektiven Varietät V mit normalen Überkreuzungen betrachten ([GrSchm, §4]).
- Illustriere am Beispiel einer singulären projektiven Kurve V, wie sich die reinen Hodgestrukturen auf der Normalisierung $\tilde{V}$ und dem singulären Ort sich auf der ersten Kohomologie von V tatsächlich vermischen. Zeige: Ist Γ der duale Graph von V, so gilt $\dim W_0 = \dim H^1(\Gamma)$ ([KuKu, S. 149f, S. 7f]).[1]

[1] Es wäre schön, die Enschränkung auf Kurven mit glatten irreduziblen Komponenten abzuschwächen auf Kurven mit Doppelpunkten. Dazu muss für jeden Doppelpunkt in einer irreduziblen Komponente V_i eine Schleife im dualen Graphen eingefügt werden, und $\mathbb{C}_{V_i}$ in der exakten Sequenz [KuKu, S. 150] durch den push-forward der Garbe $\mathbb{C}_{\tilde{V}_i}$ auf der Normalisierung $\tilde{V}_i$ ersetzt werden.

4. Vortrag: Ahlfors-Lemma und der Satz vom nilpotenten Orbit (50 Minuten)

- Das Ahlfors-Lemma ist das wichtigste Hilfsmittel für den folgenden Beweis. Es schätzt eine beliebige hyperbolische Metrik auf Δ mit Schnittkrümmung ≤ -1 durch die Poincaré-Metrik ab ([GrSchm, §7a]).
- In einer Situation wie in der Einleitung sei oBdA die Monodromie unipotent,[2] und sei N der Logarithmus der Monodromie. Sei $F\colon U \to D$ die induzierte Abbildung der oberen Halbebene (als universelle Überlagerung von Δ^*) in den klassifizierenden Raum. Dann ist $e^{wN} \cdot p_0$ (für eine geignete Wahl einer Referenzhodgestruktur p_0) asymptotisch zu $F(w)$ für $\mathrm{Im} w \to +\infty$. Dies ist die Aussage des Satzes vom nilpotenten Orbit. Wie in [GrSchm, § 8, 9a] wollen wir exemplarisch den Fall eine Hodgestruktur vom Gewicht 2 behandeln.[3]

5. Vortrag: SL_2-Orbit-Satz und Limes-Hodgestrukturen (59.9 Minuten)

- Aus der Monodromie erhält man eine Gewichtsfiltrierung $W_\bullet$ auf der Kohomlogie einer glatten Faser.[4] Aus dem Ergebnis des letzten Vortrags kann man die Existenz eines Limes der Hodgefiltrierung folgern ([GrSchm, § 10 b]). Diese bilden eine vermischte Hodgestruktur.
- Für den Beweis müssen wir den Satz vom nilpotenten Orbit noch nützlicher machen durch den SL_2-Orbit-Satz, der zu allen möglichen auftretenten Orbits eine $SL_2(\mathbb{C})$-Operation konstruiert; dann ist das Degenerationsverhalten durch die SL_2-Darstellung bestimmt:

  Satz 2 *[GrSchm, Theorem 9.19] Sei $\{e^{wN} \cdot p_0 | w \in \mathbb{C}\}$ ein nilpotenter Orbit, wie er in der Situation des letzten Vortrags auftreten kann (dabei ist $N \in G_\mathbb{C}$ eine nilpotente Matrix, und p_0 gewählte Hodgestruktur). Dann gibt es einen Morphismus algebraischer Gruppen $\psi\colon SL_2(\mathbb{C}) \to G_\mathbb{C}$ und eine Abbildung $\tilde{\psi}\colon U \to D$ der oberen Halbebene in den klassifizierenden Raum (der SL_2-Orbit), die bezüglich $\psi|_{SL_2(\mathbb{R})}$ äquivariant ist, mit (u. a.) den folgenden Eigenschaften:*[5]

  - *$e^{wN} \cdot p_0$ und $\tilde{\psi}(w)$ konvergieren für $w \to \infty$ gegeneinander; genauer, es gibt eine holomorphe Abbildung g von einer Umgebung von ∞ in $\mathbb{C} \cup \infty$ nach $G_\mathbb{C}$ mit $g(\infty) = e$ und*
  $$e^{wN} \circ p_0 = g(-iw) \circ \tilde{\psi}(w).$$
  - *Dabei ist $g(w) \in G_\mathbb{R}$ für $w \in i\mathbb{R}^+$.*
  - *Die induzierte Abbildung ψ_* auf Ebene der Liealgebren bildet $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ auf N ab.*

  Wir folgen der Beweisskizze in [GrSchm, §9b].
- Es soll nun der Beweis, dass die oben definierte Gewichtsfiltrierung und Limes-Hodgefiltrierung in der Tat eine vermischte Hodgestruktur bilden, skizziert werden. Für den vollständigen Beweis, [Schm, §6] bleibt sicher nicht genügende Zeit. Es wäre aber schön zu verstehen, wie der SL_2-Orbit-Satz es ermöglicht, den Satz auf die explizite Untersuchung von Darstellungen von $sl_2(\mathbb{C})$ zurückzuführen.

[2] Aus der letzten AG wissen wir, dass sie quasi-unipotent ist.
[3] Die Periodenmatrizen müssen dafür noch ad hoc eingeführt werden.
[4] Anstelle des etwas umständlichen Beweises der Existenz und Eindeutigkeit der Gewichtsfiltrierung wie in [Schm, 6.4] kann man trivial die Existenz aus der Jordan-Normalform folgern, siehe Bildchen S. 248, [Schm].
[5] Es müssen nur Eigenschaften gezeigt werden, die im nachfolgenden Teil des Vortrags verwendet werden.

6. Vortrag: Die exakte Clemens-Schmid-Sequenz (40 Minuten)

- Die Clemens-Schmid-Sequenz setzt die vermischte Hodgestruktur der speziellen Faser mit der Limes-Hodgestruktur in einer langen exakten Sequenz in Beziehung. Diese Sequenz soll konstruiert werden ([GrSchm, §10b], [KuKu, 5.3]).
- Anstelle des Beweises aus [ClSchm] soll eine Anwendung der Clemens-Schmid-Sequenz auf die Monodromie einer Faserung von Kurven gezeigt werden: Sei Γ der duale Graph der singulären Kurve in der speziellen Faser. Dann ist die Monodromie auf H^1 genau dann trivial, wenn Γ ein Baum ist, also keine geschlossenen Wege enthält ([KuKu, 5.4]).

Literatur

[ClSchm] Clemens, Schmid *Degeneration of algebraic manifolds.* To appear (1973).

[GrSchm] P. Griffiths, W. Schmid *Recent developments in Hodge theory: a discussion of techniques and results*, in: *Discrete subgroups of Lie groups and applicatons to moduli (Internat. Colloq., Bombay, 1973)*, Oxford University Press, 1975.

[KuKu] V. S. Kulikov, P. F. Kurchanov *Complex Algebraic Varieties: Periods of Integrals and Hodge Structures.* in: *Algebraic geometry, III*, EMS 36, Springer-Verlag, 1–217.

[Schm] W. Schmid, *Variation of Hodge structure: the singularities of the period mapping.* Invent. Math. 22 (1973), 211–319.

[Voi] C. Voisin *Symétrie miroir.* Panoramas et Synthèses vol. 2, Société Mathématique de France, Paris, 1996.