Degeneration der Hodge-Spektralfolge
mit Methoden positiver Charakteristik

Kleine AG am 6.10.2001 in Köln

Gegenstand dieses Workshops ist der algebraische Beweis für die Hodgezerlegung der Kohomologie glatter, eigentlicher [1] Varietäten aus [DI]. Statt harmonischer Analysis benutzt dieser Beweis „Standardargumente“ für die Ableitung eines Ergebnisses in Charakteristik 0 aus seinem Analogon in Charakteristik p.

Behandelt werden Methoden der positiven Charakteristik: Frobenius und Cartier-Operator. Das wesentliche Ergebnis spricht über eine partielle Zerlegung des (Frobenius-direkten-Bildes des) de Rham-Komplexes in Charakteristik p, aus der die Degeneration der Spektralfolge, welche die Hodgekohomologie $H^i(X,\Omega^j)$ mit der de Rham-Kohomologie verbindet, folgt. Außerdem werden die besagten „Standardargumente“ erklärt.

Als Zugabe erlaubt die obige Zerlegungsaussage auch einen algebraischen Beweis des Verschwindungssatzes von Kodaira, wobei die gleiche Beweisstrategie verfolgt wird.

Die Originalarbeit [DI] ist gut lesbar, ebenso trifft dies auf die weit ausführlichere Ausführung in [I] zu. Soweit nicht auf eine andere Quelle verwiesen wird, beziehen sich im Folgenden die angegebenen Literaturstellen auf [I].

1. Vortrag: Über die Hodge-Spektralfolge (30 min.)

- Dieser Vortrag soll in die Thematik einführen (§0 und die Einleitung aus [DI]), den de Rham-Komplex $\Omega^\bullet_{X/S}$ wie in 1.7, Hyperkohomologie 4.7(c) und de Rham-Kohomologie $\mathrm{H}^*_{DR}(X/S)$ als Hyperkohomologie von $\Omega^\bullet_{X/S}$ beschreiben.
- Hyperkohomologie-Spektralfolge 4.8, speziell die Spektralfolge Hodge $\Rightarrow$ de Rham und das numerische Kriterium für Degeneration bei E_1 durch Zählen der Dimension (0.3).
- Etwas über derivierte Kategorien: $\mathscr{D}(X,\mathcal{O}_X),\tau^<$ etwa 1.4, 1.5 [DI], Formalität eines Komplexes (quasiisomorph zu seiner Homologie[2]) (4.6.1) und Angabe des Ziels (0.2) [DI] der Vorträge 3+4, ohne in der Begrifflichkeit (Frobenius(twist)) Vortrag 2 vorzugreifen. (Das soll sehr kurz gehalten werden, über technische Dinge in bezug auf derivierte Kategorien darf man schweigen.)
- Es wäre schön, das Gegenbeispiel für die Degeneration in Charakteristik $p>0$ nach [M] zu erklären (Das ist eine Fläche!).

2. Vortrag: Frobenius und Cartier-Isomorphismus (50 min.)

- Zunächst muß allgemeines über Frobeniusabbildungen $F_S : S \to S$ (den Frobeniustwist schreiben wir $X^{(p)} = X \times_{F_S} S$) und den relativen Frobenius $F : X \to X^{(p)}$ gesagt werden: 3.1, 3.2, 3.3(a), 3.4 [I], 1.1 [DI], XV §1 [SGA 5]. Das am Beispiel $\mathbb{A}^n_S$ erläutern.

[1] vielleicht sollte man anmerken, daß dieser Beweis für eigentliche Varietäten funktioniert. Analytische Beweise benutzen Auflösen von Singularitäten nach Hironaka, um von projektiven zu eigentlichen Varietäten zu gelangen.

[2] das heißt in [I] „décomposable“ , also „zerlegbar“, was vielleicht eingängiger ist.

• Ziel ist dann, den Cartier-Isomorphismus zu zeigen: Théorème 1.2 [DI], bzw. Théorème 3.5 in [I]: Für ein glattes X/S gibt es einen Isomorphismus von $\mathcal{O}_{X^{(p)}}$-Algebren

$$C^{-1} : \bigoplus \Omega^i_{X^{(p)}/S} \to \bigoplus \mathscr{H}^i\, F_* \Omega^\bullet_{X/S}.$$

Dies soll sorgfältig bewiesen werden: 3.6 reduziert das elegant auf den $\mathbb{A}^1$, und dann ist es eine leichte Rechnung. (siehe auch Theorem 7.2 in [Ka]).

• Damit soll eine Variante von Corollaire 5.6 gezeigt werden: Sei X/k glatt und eigentlich, $\mathrm{char}(k) = p > 0$, $F : X \to X^{(p)}$ mit $F_*\Omega^\bullet_X$ formal $\in \mathscr{D}(X^{(p)}, \mathcal{O}_{X^{(p)}})$. Dann degeneriert $\mathrm{E}_1^{pq} : \mathrm{H}^q(X, \Omega^p_X) \Rightarrow \mathrm{H}^{p+q}_{DR}(X)$ bei E_1.

(Das ist jetzt fast ein Einzeiler! Die Formalität bedeutet im Hinblick auf den Cartier-Isomorphismus, daß $F_*\Omega^\bullet_X \cong \bigoplus \Omega^i_{X^{(p)}}[-i]$ in $\mathscr{D}(X^{(p)}, \mathcal{O}_{X^{(p)}})$.)

• Corollaire 3.6: Die Garben der Zykel, Ränder und Homologie von $F_*\Omega^\bullet_{X/S}$ sind lokal frei.

3. Vortrag: Zerlegungssatz 1 (30 min.)

• Angabe des Zerlegungssatzes, Théorème 2.1 [DI]:

Satz. *Sei S ein Schema in Charakteristik p. Sei $\tilde{S}$ eine flache Deformation*[3] *von S nach $\mathbb{Z}/p^2$. Sei X/S glatt. Dann ist jeder glatten Deformation $\tilde{X}^{(p)}/\tilde{S}$ von $X^{(p)}/S$ kanonisch ein Isomorphismus*

$$\phi_{\tilde{X}^{(p)}} : \bigoplus_{i<p} \Omega_{X^{(p)}/S}[-i] \to \tau^{<p} F_*\Omega^\bullet_{X/S}$$

in $\mathscr{D}(X^{(p)}, \mathcal{O}_{X^{(p)}})$ zugeordnet, so daß $\mathscr{H}^i(\phi_{\tilde{X}^{(p)}}) = C^{-1}$ für $i < p$.

• Etape A in §5: Zunächst nimmt man zusätzlich die Existenz einer Hochhebung $\tilde{F} : \tilde{X} \to \tilde{X}^{(p)}$ der relativen Frobenius-Abbildung an und beweist die Aussage in diesem Fall. Benötigt wird 3.7, 3.8 oder §2(b) [DI].

• In Bezug auf Cor 5.6 (Vortrag 2) soll 5.5.1 erwähnt werden: kann man X und F hochheben, so ist sogar $F_*\Omega^\bullet_{X/S}$ formal.

4. Vortrag: Zerlegungssatz 2 (45 min.)

• Hier soll der Beweis von Théorème 2.1 [DI] beendet werden, also Etape B+C aus §5. (Das ist vielleicht der interessantere Teil des Beweises: Obwohl man in der Regel die relative Frobenius-Abbildung nur lokal hochheben kann, kann man den daraus gebastelten Isomorphismus verkleben.)

• Die benötigten Ergebnisse aus der Deformationstheorie 2.11 und das Deformieren in erster Ordnung von Punkten glatter Morphismen (1.2.6) müssen bereitgestellt werden. Erstere nur erwähnt, letztere wäre genauer wünschenswert. Analog für einfache Eigenschaften von $\otimes^L$.

• Es sollte ein Grund angeben werden, wieso der Gebrauch der Produktstruktur in Etape C für Grade $\geq p$ nicht funktioniert (im Gegensatz zu Etape A).

5. Vortrag: Von Charakteristik p nach Charakteristik 0 (60 min.)

[3] wie üblich ist der Fall $S = \mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_p$ und $\tilde{S} = \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}/p^2$ schon das interessante Beispiel, wir benötigen allerdings auch $\mathbb{F}_q$ und $W_2(\mathbb{F}_q)$, deshalb die allgemeine Formulierung...

- Ziel des Vortrags ist der Beweis der Degeneration der Hodge-Spektralfolge bei E_1, also 6.9 bzw. Cor 2.7 [DI] in Charakteristik 0. Dazu sollen die "arguments standards" sorgfältig erläutert werden, die den Transfer von positiver Charakteristik nach Char. 0 erlauben. So weit wie benötigt: $\varinjlim$-Argumente, Konstruktibilität von Rf_*, abgeschlossene Punkte von $X/\mathbb{Z}$ von endlichem Typ (Prop. 6.4).
- Die Konstruktion von $\mathrm{W}_2(k)$ wird benötigt inklusive des darauf definierten Frobenius: 3.9 [I], II.6 [S].
- Kann X nach $\mathrm{W}_2(k)$ hochgehoben weden, so auch $X^{(p)}$ nach $\mathrm{W}_2(k)$: 3.9 [I], 4.1.6 [DI]. Somit kommt 5.1 zur Anwendung und damit 5.6 aus Vortrag 2.

6. Vortrag: Kodaira-Verschwindungssatz à la Raynaud (30 min.)
Die Zerlegbarkeit von $\tau^{<p}F_*\Omega^\bullet_{X/S}$ aus Vortrag 3+4 erlaubt nach einer Idee von Raynaud einen algebraischen Beweis des Kodaira-Verschwindungssatzes:

Sei $\mathscr{L}$ ample auf $X/\mathbb{C}$, so gilt $\mathrm{H}^j(X, \mathscr{L} \otimes \Omega^i) = 0$ für $i + j > \dim(X)$ und $\mathrm{H}^j(X, \mathscr{L}^{-1} \otimes \Omega^i) = 0$ für $i + j < \dim(X)$.

Dies sind 5.7, 5.8. und 6.10 bzw. Kor 2.8, 2.11 [DI].

Literatur

[DI] Deligne, P. und Illusie, L., Relèvement modulo p^2 et décomposition du complexe de de Rham, *Inventiones Math.* **89** (1987), 247-270.

[I] Illusie, L., *Frobenius et dègènerescence de Hodge* **in:** Bertin, J., Demailly, J.-P., Illusie, L., Peters, C., *Introduction à la théorie de Hodge*, Panoramas et Synthèses, **3.**, Société Mathématique de France, Paris (1996), 113-167.

[Ka] Katz, N., Nilpotent Connections and the Monodromy theorem, *Publ. Math. IHES* **39** (1970), 175-232.

[M] Mumford, D., Pathologies of modular surfaces, *Am. J. Math.* **83** (1961), 339-342.

[S] Serre, J.-P., *Corps locaux*, Hermann (1962).

[SGA 5] Grothendieck, A., et al., *Cohomologie l-adique et Fonctions L*, LNM **589**, Springer-Verlag, (1977).