Programm zur AG über Deformationstheorie

am 28. 10. 00 in Köln

Diesmal wird es im wesentlichen um die Schlessingers Arbeit [Schl68] zur Deformationstheorie gehen; zur Konkretisierung werden wir Deformationen von Schemata anschauen. Leider ist das Material ein bisschen über die Literatur verstreut; neben der etwas abstrakten Originalarbeit steht manches auch gut lesbar in [Vi97], und zur Einordnung kann vielleicht ein Blick in die weiterführende Arbeit [Ar69] nicht schaden.

Meist ist es nötig oder bequemer, die vorkommenden Schemata als separiert und noethersch oder von endlichem Typ über der Basis vorauszusetzen; das bleibt den Vortragenden überlassen und ist im folgenden nicht jedesmal neu hingeschrieben.

1. Vortrag: Einstieg in Deformationen von Schemata (45 Minuten)

Sei X_0 ein Schema über einem Körper k und A ein lokaler artinscher Ring mit Restklassenkörper k. Als erstes soll definiert werden, was eine (infinitesimale) Deformation X von X_0 über A ist und was ein Isomorphismus solcher Objekte.[1] Diese Definition wird durch die Bemerkung gerechtfertigt, dass eine flache Familie von Schemata infinitesimale Deformationen ihrer Fasern liefert.[2]

Zum Aufwärmen soll gezeigt werden, dass man Deformationen verkleben kann: Sind $A' \to A$ und $A'' \to A$ Homomorphismen lokaler artinscher Ringe mit Restklassenkörper k, davon einer surjektiv, und sind X' bzw. X'' Deformationen von X_0 über A' bzw. A'', die über A isomorphe Deformationen induzieren, so gibt es eine Deformation X''' von X_0 über $A''' := A' \times_A A''$, die X' und X'' induziert. Besitzt X keine Automorphismen (z. Bsp. $A = k$), so ist X''' eindeutig bestimmt.[3]

Schließlich werden wir noch etwas über (das Liften von) Automorphismen brauchen: Ist $A' \to A$ surjektiv mit Kern a, und gilt $m_{A'} \cdot a = 0$, so ist die Gruppe der Automorphismen einer Deformation X' über A', die auf $X := X' \otimes_{A'} A$ die Identität induzieren, kanonisch zu $\mathrm{Hom}(\Omega_{X_0}, \mathcal{O}_{X_0}) \otimes_k a$ isomorph.[4] Folgerung: Deformationen glatter, vollständiger Kurven vom Geschlecht $g > 1$ haben keine Automorphismen.

2. Vortrag: Liften und Kohomologie (45 Minuten)

Sei X ein *glattes* Schema über A, und wie eben sei $A' \to A$ surjektiv mit Kern a, für den $m_{A'} \cdot a = 0$ gelte. Es geht darum, Liftungen X' über A' von X zu klassifizieren. Man beweise, dass sowas lokal existiert und eindeutig ist.[5]

Damit und mit der Kenntnis der Automorphismen aus dem vorigen Vortrag konstruiere man ein kanonisches Element $\alpha_X \in \mathrm{H}^2(X_0, T_{X_0}) \otimes_k a$, das genau dann

[1] [Schl68], 3.7

[2] [Ha77], Example III.9.13.1; allerdings passt es besser in unser Konzept, wenn die Basis D durch $A = \mathcal{O}_{t,T}/m^n$ mit $n > 1$ ersetzt wird. Wer begründen will, dass dieses A tatsächlich artinsch ist, kann zitieren, dass ein lokaler Ring genau dann artinsch ist, wenn er noethersch ist und eine Potenz des maximalen Ideals verschwindet ([AM69], Chapter 8).

[3] [Schl68], letzter Absatz auf S. 219 – vorletzter Absatz auf S. 220 und die dort benutzten Lemmata 3.3, 3.4, 3.6

[4] Dies ist ein sehr spezieller Spezialfall von [SGA1], Exposé III, Proposition 5.1. Vielleicht lesbarer steht das Argument in [Vi97] im zweiten Absatz des Beweises von Theorem 4.4, man nehme $M' = X'_1 = X'_2 = X'$.

[5] [SGA1], Exposé III, Théorème 4.1; es wäre schön, wenn – in vernünftiger Auswahl – auch etwas zu im Beweis zitierten Aussagen gesagt würde

verschwindet, wenn eine Liftung X' existiert, und deshalb Hindernis heisst. Außerdem gebe man unter der Voraussetzung, dass ein X' gegeben ist, eine Bijektion zwischen der Menge der Isomorphieklassen von Liftungen und $\mathrm{H}^1(X_0, T_{X_0}) \otimes_k a$ an.[6] Zwei Folgerungen:

1.) $\mathrm{H}^1(X_0, T_{X_0})$ klassifiziert Deformationen über $k[\varepsilon] = k[x]/(x^2)$. Beispiel: Deformationen einer glatten, vollständigen Kurve vom Geschlecht $g > 1$ über $k[\varepsilon]$ bilden einen k-Vektorraum der Dimension $3g - 3$.

2.) Ist X_0 Faser einer flachen Familie über einem Punkt t, so erhalten wir eine lineare Abbildung vom Tangentialraum der Basis $(m_t/m_t^2)^{dual}$ nach $\mathrm{H}^1(X_0, T_{X_0})$, die Kodaira-Spencer-Abbildung genannt und durch Proposition 6.11 in [Vi97] geometrisch beschrieben wird.

3. Vortrag: Formale und verselle Deformationen (45 Minuten)

In diesem Vortrag wird der begriffliche Apparat dafür eingeführt, die Gesamtheit *aller* Deformationen eines Objektes zu studieren. Falls nicht anders angegeben, beziehen sich alle Zitate auf [Schl68].

Wir fixieren als Grundring[7] einen noetherschen vollständigen lokalen Ring Λ mit Restklassenkörper k, definieren die Kategorien $\mathbf{C} = \mathbf{C}_\Lambda$ und $\hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{C}}_\Lambda$ wie in Abschnitt 1 und geben uns einen kovarianten mengenwertigen Funktor F auf $\mathbf{C}$ vor, für den $F(k)$ einelementig ist, Beispiel: $F = \mathbf{D}_{X_0/k}$ wie in 3.7.

Man definiere formale Deformationen über $A \in \hat{\mathbf{C}}$ wie in [Ar69], Abschnitt 1, und setze F dadurch nach $\hat{\mathbf{C}}$ fort, siehe auch [Schl68], Abschnitt 2. Zur Illustration kann eines der beiden hinreichenden Kriterien [EGA3], 5.4.5 oder [Vi97], 6.3 dafür gegeben werden, dass eine formale Deformation über A eines Schemas tatsächlich von einem A-Schema herkommt.[8]

Man definiere prodarstellbar[9], nenne prodarstellende formale Deformationen universell und mache Bemerkung 2.1 über den Zusammenhang mit Modulräumen.

Man definiere Glattheit eines Morphismus von Funktoren durch die infinitesimale Liftungseigenschaft 2.2 und nenne eine formale Deformation über A versell[10], wenn der zugehörige Morphismus $h_A \to F$ glatt ist. Man zeige, dass die Basis einer versellen Deformation genau dann ein Potenzreihenring ist, wenn F glatt ist, d. h. glatt über dem trivialen Funktor h_Λ.[11]

Man definiere den Tangentialraum von F wie in 2.6 und beweise das Lemma 2.10. Dann definiere man minimal verselle (kurz: miniverselle) Deformationen[12] wie in 2.7 und zeige die Eindeutigkeitsaussage 2.9 samt des im Beweis benötigten Lemmas 1.1.

Folgerung/Beispiel: Wenn eine glatte, vollständige Kurve vom Geschlecht $g > 1$ eine minimal verselle Deformation besitzt,[13] ist deren Basis ein Potenzreihenring über Λ in $3g - 3$ Variablen.[14] Daraus folgt, dass der Modulraum solcher Kurven glatt von Dimension $3g - 3$ ist.

---

[6] Beide Aussagen zusammen findet man als Théorème 6.3 im Exposé III in [SGA1]; sie werden bewiesen, indem man Klebedaten in Čech-Kozykeln organisiert. Eine ähnliche Aussage ist Theorem 4.4 in [Vi97].

[7] Das schließt die bisher betrachteten Fälle ohne Grundring weitgehend ein: Ist die Charakteristik von k gleich Null, so ist jeder noethersche vollständige lokale Ring A mit Restklassenkörper k auf mindestens eine Weise eine Algebra über $\Lambda := k$ ([BouAC], Chapitre 9, §3, Théorème 1). Ist die Charakteristik von k positiv und k perfekt, so ist jeder noethersche vollständige lokale Ring A mit Restklassenkörper k auf kanonische Weise eine Algebra über dem Wittring $\mathrm{W}(k)$ ([BouAC], Chapitre 9, §2, Théorème 2).

[8] In [Ar69] heissen solche formalen Deformationen effektiv, in [Vi97] algebraisch.

[9] Abschnitt 2

[10] [Ar69], Abschnitt 1

[11] Remark 2.10 und die dazu nötigen Teile von Lemma 2.5

[12] Schlessinger nennt diese Deformationen prodarstellbare Hüllen, aber das hat sich eher nicht durchgesetzt.

[13] Im nächsten Vortrag wird gezeigt, dass sie sogar stets eine universelle Deformation besitzt.

[14] Man berufe sich auf den zweiten Vortrag.

4. Vortrag: Die Schlessinger-Kriterien (45 Minuten)

In diesem Vortrag wird das Hauptresultat von [Schl68], nämlich das Kriterium für die Existenz minimal verseller und universeller Deformationen, formuliert und bewiesen.[15] Die benötigten Definitionen 1.2 und 1.3 sowie das Lemma 1.4, die in den vorigen Vorträgen noch nicht vorkamen, werden an geeigneter Stelle eingebaut. Als Anwendung erhalten wir die Existenz minimal verseller Deformationen glatter, vollstandiger Schemata und sogar die Existenz universeller Deformationen glatter, vollständiger Kurven vom Geschlecht $g > 1$.[16]

5. Vortrag: Verschwindende Hindernisse (45 Minuten)

In diesem Vortrag wird Kawamatas Kriterium für das Verschwinden aller Hindernisse, d. h. für die Glattheit der Basis minimal verseller Deformationen, angegeben und bewiesen.[17] Eine Anwendung ist der Satz von Bogomolov-Tian-Todorov, der besagt, dass bei glatten, eigentlichen Schemata in Charakteristik Null mit trivialem kanonischem Geradenbündel (sogenannten Calabi-Yau-Varietäten) alle Hindernisse verschwinden.[18]

Literatur

[Schl68] M. Schlessinger: *Functors of Artin rings.* Trans. Amer. Math. Soc. 130 (1968), 208–222

[Ha77] R. Hartshorne: *Algebraic Geometry.* GTM 52, Springer 1977

[AM69] M. F. Atiyah, I. G. Macdonald: *Introduction to Commutative Algebra.* Addison-Wesley 1969

[SGA1] A. Grothendieck: *Revêtements Etales et Groupe Fondemontal (SGA1).* LNM 224, Springer 1971

[Vi97] A. Vistoli: *The deformation theory of local complete intersections.* alg-geom/9703008

[Ar69] M. Artin: *Algebraization of formal moduli I.* in: D. C. Spencer, S. Iyanaga (editors): Global Analysis. Papers in Honor of K. Kodaira. University of Tokyo Press 1969

[BouAC] N. Bourbaki: *Algèbre Commutative.* Masson 1983

[EGA3] A. Grothendieck: *Eléments de géométrie algèbrique III.* Publ. Math. IHES 11 (1961) und 17 (1963)

[Ka92] Y. Kawamata: *Unobstructed deformations – a remark on a paper of Z. Ran.* J. Alg. Geom. 1 (1992), 183–190

[Ka97] Y. Kawamata: *Erratum on "Unobstructed deformations".* J. Alg. Geom. 6 (1997), 803–804

[Ra92] Z. Ran: *Deformations of manifolds with torsion or negative canonical bundle.* J. Alg. Geom. 1 (1992), 279–291

[De68] P. Deligne: *Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales.* Publ. Math. IHES 35 (1968), 197–226

[15] [Schl68], 2.11 – Ende des zweiten Abschnitts

[16] Für die Kriterien H_1, H_2 und H_4 berufe man sich auf den ersten Vortrag, für H_3 auf den zweiten.

[17] [Ka92], Abschnitt 1; man beachte [Ka97]

[18] Das Argument steht in den ersten sechseinhalb Zeilen des Beweises von Corollary 2 in [Ra92]; es wäre schön, wenn das dabei benutzte berühmte Théorème 5.5 aus [De68] ein wenig kommentiert werden könnte.