$\mathcal{D}$-Moduln

18. Oktober 2003 in Bonn

In diesem Workshop wollen wir uns mit der Theorie der $\mathcal{D}$-Moduln beschäftigen. Die ursprüngliche Motivation für diese Theorie war es, einen algebraischen Zugang zum Studium von Systemen linearer partieller Differentialgleichungen zu liefern:

Seien $u_1, \ldots, u_p$ die unbekannten Funktionen in $x = (x_1, \ldots, x_n)$, und sei

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{p} P_{ij}(x, \partial) u_j = 0, \qquad j = 1, \ldots, q$$

ein solches System linearer partieller Differentialgleichungen, wobei $P_{ij}(x, \partial)$ lineare partielle Differentialoperatoren sind, von denen jeder als endliche Summe

$$\sum_{a \in \mathbb{N}_0^n} \lambda_a(x) \partial^a, \qquad \text{mit} \quad \partial^{(a_1, \ldots, a_n)} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{a_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{a_n}$$

geschrieben ist. Sei nun $\mathcal{D}$ der (nichtkommutative) Ring der linearen partiellen Differentialoperatoren, und sei M der Kokern der Abbildung

$$\begin{aligned} P \quad : \quad & \mathcal{D}^{\oplus q} \to \mathcal{D}^{\oplus p}, \\ & (Q_1, \ldots, Q_q) \mapsto \left(\sum_{i=1}^{q} Q_i P_{i1}, \ldots, \sum_{i=1}^{q} Q_i P_{ip} \right). \end{aligned}$$

Es bezeichne F den Raum der Funktionen, in denen wir die Lösungen finden wollen (z.B. den Raum der holomorphen Funktionen, der C^∞-Funktionen oder der Distributionen). Da Differentialoperatoren auf Funktionen in F angewandt werden können, ist F ein $\mathcal{D}$-Linksmodul, und es gilt dann

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(M, F) &= \ker(F^{\oplus p} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}^{\oplus p}, F) \xrightarrow{P} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}^{\oplus q}, F)) \\ &= \{(u_1, \ldots, u_p) \in F^{\oplus p} \mid u_1, \ldots, u_p \text{ genügen der Dgl. } (*)\} \end{aligned}$$

Also hängt der Raum der Lösungen der Differentialgleichung nur von M ab. Wählen wir umgekehrt eine endliche Präsentation

$$\mathcal{D}^{\oplus q} \longrightarrow \mathcal{D}^{\oplus p} \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

von M, so erhält man ein System von linearen partiellen Differentialgleichungen.

Inzwischen findet die Theorie der $\mathcal{D}$-Moduln aber weit über den Bereich der Differentialgleichungen hinaus Anwendung (so zum Beispiel in der Darstellungstheorie, in der Singularitätentheorie oder der mathematischen Physik).

In dem Workshop werden wir uns mit den Grundlagen dieser Theorie beschäftigen, wobei der Schwerpunkt für uns auf der Theorie der holomorphen partiellen

Differentialgleichungen auf komplexen Mannigfaltigkeiten (oder – ein wenig algebraischer ausgedrückt – auf der Theorie der Vektorbündel mit Zusammenhang auf einer komplexen Varietät) liegt. In dem letzten Vortrag soll es dann noch um eine Anwendung auf einen Monodromiesatz von Brieskorn gehen.

1. Vortrag. Vektorbündel mit Zusammenhängen (60 min.)

Wir beginnen mit dem *Dictionnaire* in [De] I, §§1–3, wo die Beziehung zwischen lokalen Systemen, Darstellungen der Fundamentalgruppe, integrablen Zusammenhängen und Differentialgleichungen dargestellt wird.

Zusätzlich soll in dieses Wörterbuch auch direkt der Begriff des $\mathcal{D}$-Moduls eingefügt werden. Dazu muß der Ring $\mathcal{D}$ (bzw. vielleicht direkt allgemeiner die Garbe $\mathcal{D}_X$ für glattes $X/\mathbb{C}$) definiert werden; siehe z. B. [Bo] II, 2.12 oder [Ph] Teil 2. Die Definitionen 2.2 und 3.2 in [Ph] Teil 2 sollten angegeben und motiviert werden. Vielleicht kann man kurz etwas zu den wichtigen Eigenschaften von $\mathcal{D}$ sagen (Kohärenz, ...); wir wollen uns aber jedenfalls nicht die Zeit nehmen, sie zu beweisen.

Schließlich sollte noch etwas zum Gauss-Manin-Zusammenhang gesagt werden, den wir im fünften Vortrag brauchen (siehe dazu auch [Ka]).

2. Vortrag. Differentialgleichungen; der Satz von Fuchs (45 min.)

Wir betrachten nun meromorphe gewöhnliche Differentialgleichungen in einer Variablen mit regulären singulären Punkten, und das Theorem von Fuchs; [Bo] III §1. Die Abschnitte 1.1 bis 1.3 sollten gründlich behandelt werden; 1.4 kann gegebenenfalls gekürzt werden.

3. Vortrag. Differentialgleichungen und $\mathcal{D}$-Moduln (45 min.)

Die Ergebnisse aus dem vorherigen Vortrag sollen nun in die Sprache der Vektorbündel mit Zusammenhang bzw. der $\mathcal{D}$-Moduln übersetzt werden: [Bo] III §2. Proposition 2.4.4 und alles, was danach kommt, sind für uns nicht mehr so wichtig; dort kann gegebenenfalls gekürzt werden.

4. Vortrag. Reguläre Zusamenhänge (60 min.)

In diesem Vortrag werden die Begriffe aus den Vorträgen 2 und 3 auf den höherdimensionalen Fall verallgemeinert. Ein zentraler Begriff ist der des regulären Zusammenhangs. Wir folgen [Bo] IV bis zur Riemann-Hilbert-Korrespondenz; d.h. §§1–5. Siehe auch [De] II.

Der Begriff des $\mathcal{D}$-Moduls kommt hier nur implizit vor; es wäre schön, wenn sich das im Vortrag zumindest kurz expliziter machen ließe.

5. Vortrag. Anwendung: Brieskorns Theorem über die Monodromie (60 min.)

Zum Schluß wollen wir noch eine Anwendung der Theorie der regulären Zusammenhänge behandeln: [De] III.2.

Ehrlicherweise muß man allerdings sagen, daß dabei nicht nur die Ergebnisse der ersten vier Vorträge angewendet werden, sondern darüberhinausgehende Resultate. Daher sind noch einige Vorbereitungen zu treffen: Definition der Monodromie (für lokale Systeme bzw. für Vektorbündel mit Zusammenhang, [De] II.1, insbes. II.1.17.1); Definition des Gauss-Manin-Zusammenhangs; der Regularitätssatz (um zum Beweis etwas Substantielles zu sagen, wird wohl nicht genug Zeit sein).

Literatur

[Bj1] J.-E. Björk, *Rings of differential operators*, North-Holland Math. Library **21**. North-Holland Publishing Co., 1979.

[Bj2] J.-E. Björk, *Analytic $\mathcal{D}$-modules and applications*, Math. and its Appl. **247**, Kluwer, 1993.

[Bo] A. Borel et. al., *Algebraic $\mathcal{D}$-Modules*, Perspectives in Math., vol. **2**, Academic Press, 1987.

[Co] S. C. Coutinho, *A primer of algebraic $\mathcal{D}$-modules*, London Math. Soc. Student Texts **33**. Cambridge University Press, 1995.

[De] P. Deligne, *Equations Différentielles á Points Singuliers Réguliers*, Springer Lecture Notes in Math. **163**, 1970.

[GM] S. I. Gelfand, Y. I. Manin, *Homological Algebra*, Encycl. of Math. Sciences **38** (Algebra V), Springer, 1994.

[Ka] N. Katz, *Nilpotent connections and the monodromy theorem: Applications of a result of Turrittin*, Publ. Math. IHES **39** (1970), 175–232.

[Ph] F. Pham, *Singularités Des Systèmes Différentiels De Gauss-Manin*, Prog. in Math. **2**, Birkhäuser, 1979.