Induzierte Darstellungen der GL_n über einem lokalen Körper

27.11.99 in Köln

Wir wollen gewisse irreduzible Darstellungen der GL_n über einem nichtarchimedischen lokalen Körper untersuchen. Diese teilt man ein in die cuspidalen Darstellungen (die 'nicht von Darstellungen einer kleineren Gruppe herkommen') und die induzierten Darstellungen (die von Darstellungen einer kleineren Gruppe 'induziert werden').

Wir widmen uns ausschließlich den induzierten Darstellungen und untersuchen Fragen wie die, ob eine Darstellung, die von einer irreduziblen Darstellung induziert wird, selbst wieder irreduzibel ist, bzw. wie sie sich in irreduzible Komponenten zerlegt.

Wir richten uns nach dem Artikel [2] von Bernstein und Zelevinsky (genauer gesagt entsprechen die vier Vorträge den ersten vier Abschnitten dieses Artikels). Teilweise werden wir auch auf den Vorgänger dieses Artikels [1] zurückgreifen.

Es gibt noch eine Fortsetzung von [2], nämlich Zelevinskys Artikel [3], auf den wir aus Zeitgründen aber nicht eingehen können.

1. Vortrag

Präliminarien (60 min.)

In diesem Vortrag sollen einige Grundbegriffe bereitgestellt werden, wie im ersten Abschnitt von [2]. Diese Sachen sind zum größten Teil noch ausführlicher in [1] dargestellt. Dort findet man auch die Beweise, die in [2] ausgelassen sind.

Die wichtigsten Stichpunkte sind:

- l-Gruppen, Darstellungen von l-Gruppen, algebraische, zulässige Darstellungen. Die kontragradiente Darstellung
- Die Funktoren $I_{U,\theta}, i_{U,\theta}, r_{U,\theta}$: Definition und Eigenschaften
- 'Verkleben' von Objekten einer abelschen Kategorie
- Theorem 5.2 (Formulierung und Beweisskizze - möglichst ausführlich)

2. Vortrag

Induzierte Darstellungen der GL_n (80 min.)

Dieser Vortrag soll den zweiten Abschnitt von [2] behandeln. Allerdings beschränken wir uns von vorneherein auf den Fall der GL_n. Alle Bezeichnungen können und sollen also in diesen Kontext übersetzt werden. Dadurch vereinfachen sich auch einige Beweise.

Die wichtigsten Stichpunkte:

- Parabolische Untergruppen und deren unipotentes Radikal, Levi-Untergruppen in der GL_n
- Die Funktoren $i_{G,M}, r_{M,G}$, Eigenschaften
- Quasi-cuspidale und cuspidale Darstellungen, Thm. 2.4 und Thm. 2.5. Die Beweise der Theoreme finden sich in [1]: Thm. 2.4 a) ist dort 4.17, b) ist 3.30, c) ist 3.24. Thm 2.5 entspricht 3.19 und 3.25. Vielleicht ist ja in ein oder zwei Punkten eine Beweisskizze möglich?
- Die Länge einer Standarduntergruppe, Thm. 2.8.
- Thm. 2.9
- Zum Beweis von Theorem 2.8 und 2.9 werden die drei Lemmata 2.11, 2.12 und 2.17 benötigt. Der Beweis von 2.17 ist im Fall der GL_n klar (vgl. die Bemerkung in [2]). Auch der Beweis von 2.11 ist in diesem Fall einfacher zu beweisen. (Stichwort 'Kostant-Repräsentanten', vergleiche den Anfang von Abschnitt 6, wo das Lemma allgemein bewiesen wird.) Der Beweis von Lemma 2.12 ist wesentlich aufwendiger, und läßt sich anscheinend auch im speziellen Fall der GL_n nicht vereinfachen. Hier soll der Beweis also nur skizziert werden (unter Verwendung von Theorem 5.2 aus dem 1. Vortrag).

3. Vortrag

Darstellungen der Gruppe P (60 min.)

Es sei $P \subseteq GL_n$ die Untergruppe der Matrizen, deren letzte Zeile die Form $(0, \ldots, 0, 1)$ hat. In diesem Vortrag sollen die irreduziblen Darstellungen von P klassifiziert werden.

Die wichtigsten Stichpunkte sind:

- Definition der Gruppe P und der Funktoren $\Psi, \Psi^+, \Phi^-, \Phi^+, \widehat{\Phi}^+$, Relationen zwischen diesen Funktoren. Auf den Beweis von Prop. 3.2f) gehen wir nicht näher ein, da hier der Begriff der l-Garbe aus [1] benötigt wird.

- Prop. 3.4, Korollar 3.5.
- Kontragradiente Darstellungen

4. Vortrag

Die Einschränkung induzierter Darstellungen auf die Gruppe P (60 min.)

In diesem letzten Vortrag werden die wesentlichen Ergebnisse behandelt:

- Das Irreduzibilitätskriterium 4.2, Theorem 4.4 zitieren wir nur.
- Theorem 4.9

Literatur

[1] I. N. Bernstein, A. V. Zelevinsky, *Representations of the group $GL(n, F)$ where F is a non-archimedean local field.* Russian Math. Surveys 31:3 (1976) 1–68.

[2] I. N. Bernstein, A. V. Zelevinsky, *Induced representations of reductive $\mathfrak{p}$-adic groups. I.* Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 4^e série, t. 10 (1977) 441–472.

[3] A. V. Zelevinsky, *Induced representations of reductive $\mathfrak{p}$-adic groups. II. On irreducible representations of $GL(n)$.* Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 4^e série, t. 13 (1980) 165–210.