Von Deformationen zu Modulstacks

Programm für den Workshop am 3. 2. 01 in Bonn

Unser Thema ist diesmal Artins Methode, mithilfe von Deformationstheorie Modulräume zu konstruieren. Damit es nicht zu abstrakt wird, konzentrieren wir uns wie letztes Mal auf ein konkretes Modulproblem, das der glatten, eigentlichen Schemata.

Bei Isomorphieklassen (z.B. solcher Schemata) treten immer wieder Komplikationen auf, die letztlich von Automorphismen herrühren. Um uns die zu ersparen, arbeiten wir statt mit Mengen von Isomorphieklassen oft mit Gruppoiden[1] von Schemata und deren Isomorphismen.

Die wesentlichen Beweise für unsere Methode finden sich in den ersten beiden Kapiteln der Arbeit [Ar69b] sowie in [Ar74]; mit z. T. skizzierten Beweisen steht vieles auch in der schönen Vorlesungsausarbeitung [Ar73]. Wer sich vorher etwas in den Begriff des Stacks einlesen möchte, der ja das Ziel dieser Vorträge darstellt, kann z. B. in den Artikel [Go99] von Gomez reinschauen, der gut zu lesen und recht motivierend ist.[2]

Meist ist es nötig oder bequemer, die vorkommenden Schemata als separiert und noethersch oder endlichen Typs über der Basis vorauszusetzen; das bleibt den Vortragenden überlassen und ist im folgenden nicht jedesmal neu hingeschrieben.

1. Vortrag: Artins Approximationssatz (45 Minuten)

Sei A eine endlich erzeugte Algebra über einem Körper k, $p \in \operatorname{Spec} A$ ein Punkt, A_p die zugehörige Lokalisierung und $\hat{A}_p = \varprojlim A_p/m^n$ deren Vervollständigung. Man definiere die Henselisierung $\tilde{A}_p := \varinjlim A'$ als Limes über alle Paare (A', p'), die aus einer zusammenhängenden étalen A-Algebra A' und einem Punkt $p' \in \operatorname{Spec} A'$ über p mit demselben Restklassenkörper bestehen. Beispiel: Ist $A = k[x_1, \dots, x_n]$ ein Polynomring und p der Nullpunkt, so ist $\tilde{A}_p$ der Ring der algebraischen Potenzreihen[3]. Ziel dieses Vortrags ist es, zu beweisen:

Satz 1 *Ist ein Funktor $F : (A-\mathrm{alg}) \to (\mathrm{sets})$ lokal von endlicher Darstellung[4], so gibt es zu jedem $\hat{x} \in F(\hat{A}_p)$ und jedem n ein $\tilde{x} \in F(\tilde{A}_p)$ mit dem gleichen Bild in $F(A_p/m^n)$.*[5]

Korollar: Ist $\hat{X}$ ein glattes, eigentliches Schema über $\hat{A}_p$, so gibt es zu gegebenem n eine étale A-Algebra A' wie oben und ein glattes, eigentliches Schema X' über A' mit $X' \otimes A_p/m^n \cong \hat{X} \otimes A_p/m^n$.

Die Primärquelle für diesen Vortrag ist [Ar69a, Abschnitte 1, 2 und 5]. Da wir etwas mehr voraussetzen[6], läßt sich der Beweis vereinfachen, siehe [Ar73, S. 42–45].

2. Vortrag: Verselle Deformationen sind algebraisierbar. (45 Minuten)

Zunächst soll einiges aus der vorigen AG ohne Beweise wiederholt werden. Dabei soll jeweils gleich eine verfeinerte Version erläutert werden, die nicht nur Isomorphieklassen von Deformationen, sondern auch deren Automorphismen berücksichtigt:

[1] Ein Gruppoid ist eine Kategorie, in der jeder Morphismus ein zweiseitiges Inverses besitzt.
[2] Die klassiche Referenz ist der Anhang in [Vi89].
[3] [Mi80, Example I.4.10.b]; ein Beweis steht in [Na62, Corollary 44.3]
[4] [Ar69a, Definition 1.5]
[5] [Ar69a, Theorem 1.12]
[6] nämlich einen Grundkörper statt eines Dedekindringes

- infinitesimales Verkleben: Für jeden Ring A bezeichne $\mathcal{M}(A)$ das Gruppoid der glatten, eigentlichen Schemata über A und A-Isomorphismen. Ist $B \to A$ ein Ringhomomorphismus und $A' \to A$ eine infinitesimale Erweiterung[7], so ist der kanonische Funktor $\mathcal{M}(B \times_A A') \to \mathcal{M}(B) \times_{\mathcal{M}(A)} \mathcal{M}(A')$ eine Äquivalenz von Gruppoiden.[8]

- Begriff 'versell': Ein glattes, eigentliches formales Schema X über einer vollständigen lokalen k-Algebra A mit Restklassenkörper k_0 heißt (formal) versell[9], wenn für jede Surjektion $B' \to B$ artinscher lokaler k-Algebren mit Restklassenkörper k_0 jedes Objekt in $A(B) \times_{\mathcal{M}(B)} \mathcal{M}(B')$ bis auf Isomorphie von $A(B')$ herkommt. Dabei ist mit $A(B)$ das diskrete[10] Gruppoid zur Menge der Homomorphismen $A \to B$ gemeint usw.

  Ein glattes, eigentliches Schema X über einer k-Algebra A heißt formal versell in einem Punkt $p \in \operatorname{Spec} A$, wenn es nach Basiswechsel zu $\hat{A}_p$ formal versell wird.

- Satz von Schlessinger: Jedes glatte, eigentliche Schema X_0 über einem endlich erzeugten Erweiterungskörper k_0 von k ist spezielle Faser eines versellen formalen Schemas X über einer noetherschen vollständigen lokalen k-Algebra.[11] Ist das kanonische Geradenbündel von X_0 ample, so ist das formale Schema X ein Schema.[12]

In diesem Vortrag soll gezeigt werden, dass solche versellen Schemata X über noetherschen vollständigen lokalen k-Algebren über geeignete endlich erzeugte k-Algebren ausgebreitet werden können. Ziel:

Satz 2 *Sei X_0 ein glattes, eigentliches Schema mit amplem kanonischem Geradenbündel über einem endlich erzeugten Erweiterungskörper k_0 von k. Dann gibt es ein ebensolches Schema X über einer endlich erzeugten k-Algebra A und einen Punkt $p \in \operatorname{Spec} A$ mit Restklassenkörper k_0, in dem X formal versell ist und als Faser gerade X_0 hat.*

Das ist ein typischer Spezialfall von Theorem 1.6 aus [Ar69b], das im zweiten Abschnitt dieser Arbeit bewiesen[13] wird. Für den ganzen Beweis reicht die Zeit vielleicht nicht; eine gute Zusammenfassung steht in [Ar73, S. 68–71].

3. Vortrag: 'Versell' ist eine offene Eigenschaft. (60 Minuten)

Wir betrachten weiter Familien glatter eigentlicher Schemata endlichen Typs. Zunächst wird die beim letzten Mal (allerdings nicht ganz in dieser Allgemeinheit) bewiesene Theorie des infinitesimalen Liftens wiederholt:[14]

Sei $0 \to I \to A' \to A \to 0$ eine infinitesimale Ringerweiterung mit $I^2 = 0$. Sei X eine Familie[15] über A. Dann gibt es ein kanonisches Element $o_X(A')$ in $H^2(X, T_{X/A} \otimes I)$, das genau dann 0 ist, wenn sich X zu einer Familie X' über A' fortsetzen lässt. In diesem Fall operiert $H^1(X, T_{X/A} \otimes I)$ transitiv und treu auf den Fortsetzungen[16] von X nach A'. Schließlich ist $H^0(X, T_{X/A} \otimes I)$ die Gruppe der Automorphismen von X' über A', die auf X die Identität induzieren.

Mit diesem Hilfsmittel wollen wir folgendes beweisen:[17]

Satz 3 *Sei eine Familie X über einer endlich erzeugten k-Algebra A gegeben. Ist X formal versell an einem Punkt $p \in \operatorname{Spec} A$, dann ist sie auch formal glatt in einer offenen Umgebung von p.*

Dabei bedeutet hier formal glatt, dass für jede infinitesimale Erweiterung $B' \to B$ von k-Algebren der natürliche Funktor $A(B') \to A(B) \times_{\mathcal{M}(B)} \mathcal{M}(B')$ wesentlich (also bis auf Isomorphie) surjektiv

[7] d.h. ein surjektiver Ringhomomorphismus mit nilpotentem Kern
[8] siehe [Ar74, 2.3]
[9] [Ar74, 3.1]
[10] Ein Gruppoid heißt diskret, wenn es ausser den Identitäten keine Morphismen besitzt.
[11] [Ri72, Theorem 1.20]
[12] [EGA3, 5.4.5]
[13] Im Anhang zu [Ar74] wird eine Lücke geschlossen.
[14] siehe [SGA1, Exposé III, Proposition 6.1 und Théorème 6.3]
[15] Familie meint hier und im Folgenden immer eine Familie glatter eigentlicher Schemata endl. Typs
[16] Fortsetzungen sind hier Familien X' über A' mit einer Wahl eines Isomorphismus $X'|_A \cong X$.
[17] Theorem 4.4 in [Ar74]

ist; der Unterschied zur formalen Versalität ist also, dass für B und B' beliebige Algebren anstelle von Artin-Algebren zugelassen sind.

Der Beweis verteilt sich auf die Abschnitte 3 und 4 des Artikels [Ar74]. Zunächst muss Theorem 3.3[18] bewiesen werden; es besagt, dass eine Familie über einem Henselschen Ring, die formal versell ist (also die Hochhebungseigenschaft bzgl. Artin-Algebren hat), auch formal glatt ist (also bzgl. aller infitesimaler Ringererweiterungen die Hochhebungseigenschaft hat). Damit wird im Beweis zu Satz 4.4 gezeigt, dass die Menge der Punkte, an denen eine Familie formal versell ist, eine offene Menge ist. Mit Proposition 4.2, welche besagt, dass eine Familie genau dann formal glatt ist, wenn sie in jedem Punkt formal versell ist, folgt die Behauptung.

Der Beweis ist wahrscheinlich zu umfangreich, um vollständig vorgetragen zu werden;[19] es wäre wünschenswert, wenn man zumindest versteht, wie die Eigenschaften 4.1 der Kohomologiegruppen[20], die infinitesimales Liften kontrollieren, in den Beweis eingehen.

4. Vortrag: Algebraische Räume (45 Minuten)

Die étale und die flache Topologie auf affinen Schemata werden kurz eingeführt[21], danach flacher Abstieg[22] anhand der Aussage, dass jedes Schema eine flache Garbe darstellt, und dann algebraische Räume[23] als flache Garben, die eine étale Überdeckung durch Schemata besitzen.[24] Hauptsächlich soll in diesem Vortrag der

Satz 4 *Sei R eine endlich erzeugte k-Algebra. Ein Funktor $F : (R-\mathrm{alg}) \to (\mathrm{sets})$ ist durch einen algebraischen Raum lokal endlichen Typs über R darstellbar, falls gilt:*

- *infinitesimales Verkleben: Ist $B \to A$ ein Homomorphismus von R-Algebren und $A' \to A$ eine infinitesimale Erweiterung, so ist $F(B \times_A A') \to F(B) \times_{F(A)} F(A')$ eine Bijektion.*
- *infinitesimales Liften: Zu jedem $x \in F(A)$ und jedem A-Modul M sind endlich erzeugte A-Moduln $T^1_x(M), T^2_x(M)$ gegeben, die sich wie Kohomologiegruppen verhalten.[25] Zu jeder infinitesimalen Erweiterung $0 \to I \to A' \to A$ mit $I^2 = 0$ und jedem $x \in F(A)$ ist in funktorieller Weise ein Element $o_x(A') \in T^2_x(I)$ gegeben, das genau dann verschwindet, wenn x von $F(A')$ herkommt; in diesem Fall operiert $T^1_x(I)$ transitiv und treu auf dem Urbild von x.*
- *Effektivität formaler Deformationen: Ist A eine vollständige lokale R-Algebra, so ist $F(A) \to \varprojlim F(A/m^n)$ bijektiv.*
- *F ist lokal von endlicher Darstellung.*
- *F ist eine Garbe in der flachen Topologie.*

aus den vorigen Vorträgen abgeleitet werden.[26] Beispiel: $F = \mathrm{Isom}(X_1, X_2)$[27] für zwei glatte, eigentliche Schemata X_1, X_2 über R, vielleicht als zweites Beispiel noch den Hilbert-Funktor aus Abschnitt 6 von [Ar69b].

---

[18] ohne den Zusatz der Voraussetzung (iii)

[19] vielleicht Prop. 4.2 und 4.3 einfach ohne Beweis angeben

[20] es handelt sich um Standardsätze, siehe etwa [Ha77, 9.3, 11.1, 12.8 & 12.9]

[21] siehe etwa [Kn71, Chapter One, 3. und 4.]

[22] siehe z.B. [BLR90, Chapter 6]

[23] [Kn71]

[24] [Ar73, Definition 4.2]; wir lassen alle Separiertheitsklauseln weg

[25] Damit sind die Eigenschaften [Ar74, 2.6 und 4.1] gemeint.

[26] Hier eine ganz grobe Skizze (siehe [Ar74, Abschnitt 5, insbesondere Corollary 5.4 zu Theorem 5.3]): Die Voraussetzungen sorgen gerade dafür, dass unsere Sätze 2 und 3 (mit denselben Beweisen) auch für F gelten. Anwendung auf alle Elemente aller $F(k_0)$ und Bildung der disjunkten Summe liefert einen Morphismus von einem Schema nach F, der formal glatt und surjektiv ist. Er kann als darstellbar nachgewiesen werden. Mit einem 'slice argument' ([LM00, S. 75 Mitte]) kann aus dieser glatten Überdeckung von F eine ètale gemacht werden.

[27] d.h. $F(A)$ ist die Menge der A-Isomorphismen zwischen $X_1 \otimes A$ und $X_2 \otimes A$

5. Vortrag: Algebraische Stacks (45 Minuten)

Wie wir im letzten Vortrag gelernt haben, sind darstellbare Funktoren Garben auf der flachen Topologie. Für den Funktor der Isomorphieklassen von Familien von Schemata gilt dies aber nicht, wenn diese Automorphismen haben.[28] Schon deshalb kann es kein Schema als feinen Modulraum geben. Dies ist noch eine Motivation, mit Gruppoiden statt Mengen und gruppoidwertigen statt mengenwertigen Funktoren zu arbeiten.[29] Im Folgenden wollen wir zunächst verstehen, in welchem Sinne unser Gruppoid $\mathcal{M}$ eine Garbe über der Kategorie der k-Algebren ist.

In der Kategorie der glatten eigentlichen Schemata endlichen Typs mit amplem kanonischen Geradenbündel ist jedes treuflache Abstiegsdatum effektiv.[30] Wie wir außerdem im letzten Vortrag gesehen haben, ist der Funktor der Isomorphismen $\mathrm{Isom}(X_1, X_2)$ zwischen Familien über derselben Basis eine Garbe in der flachen Topologie. Diese beiden Eigenschaften erheben wir nun zur Definition einer Garbe von Gruppoiden, eines sogenannten Stacks.[31]

Analog zur Definition eines algebraischen Raumes verlangen wir nun von einem *algebraischen (Artin-)Stack* die relative Darstellbarkeit[32] sowie die Existenz eines formal glatten surjektiven Morphismus (Atlas) über diesem Stack.[33]

Diese Eigenschaften wollen wir nun für unser Beispiel $\mathcal{M}$ beweisen: Die relative Darstellbarkeit folgt daraus, dass $\mathrm{Isom}(X_1, X_2)$ ein algebraischer Raum ist.[34] Die Existenz des Atlas folgern wir aus dem Ergebnis der ersten drei Vorträge analog Korollar 5.2 in [Ar74]. Damit erhalten wir, dass $\mathcal{M}$ ein Artin-Stack lokal endlichen Typs über k ist.

Zusammenfassend erhalten wir Satz 5.3 aus [Ar74] als Kriterium für Darstellbarkeit durch einen Artin-Stack.[35]

Literatur

[Ar69a] M. Artin: *Algebraic approximation of structures over complete local rings.* Publ. Math. IHES 36 (1969), 23–58

[Ar69b] M. Artin: *Algebraization of formal moduli I.* in: D. C. Spencer, S. Iyanaga (editors): Global Analysis. Papers in Honor of K. Kodaira. University of Tokyo Press 1969

[Ar73] M. Artin: *Théorèmes de Représentabilité pour les Espaces Algébriques.* Les Presses de l'Université de Montréal 1973

[Ar74] M. Artin: *Versal Deformations and Algebraic Stacks.* Inventiones 27 (1974), 165–189

[BLR90] S. Bosch, W. Lütkebohmert, M. Raynaud: *Néron Models.* Ergebnisse Band 21, Springer 1990

[EGA3] A. Grothendieck: *Eléments de géométrie algèbrique III.* Publ. Math. IHES 11 (1961) und 17 (1963)

[Go99] T. Gomez: *Algebraic stacks.* preprint, math.AG/9911199.

[Ha77] R. Hartshorne: *Algebraic Geometry.* GTM 52, Springer 1977.

[Kn71] D. Knutson: *Algebraic Spaces.* LNM 203, Springer 1971

[LM00] G. Laumon, L. Moret-Bailly: *Champs algébriques.* Springer 2000

[Ma99] Yu. I Manin: *Frobenius Manifolds, Quantum Cohomology and Moduli Spaces.* American Mathematical Society, Colloquium Publication Vol. 47 (1999)

[Mi80] J. S. Milne: *Étale Cohomology.* Princeton University Press 1980

[Na62] M. Nagata: *Local Rings.* Interscience, J. Wiley 1962

[Ri72] D. S. Rim: *Formal deformation theory.* SGA 7, Exposé VI. LNM 288, Springer 1972

[SGA1] A. Grothendieck: *Revêtements Etales et Groupe Fondemontal (SGA1).* LNM 224, Springer 1971

[Vi89] A. Vistoli: *Intersection theory on algebraic stacks and on their moduli spaces.* Inventiones 93 (1989)

---

[28] Dies ist zum Beispiel knapp in [Go99, S. 4] erläutert.

[29] Def. 2.8 in [Go99] oder etwas suggestiver [Ma99, V.3.2 VERSION 1]; in der Literatur wird Stack in der Regel definiert als in Gruppoiden cogefaserte Kategorie über der der Schemata; die Funktordefinition ist aber leichter zugänglich; zum Vergleich siehe [Ma99, S. 211]

[30] [BLR90, Theorem 6.7]

[31] z. B. [Go99, Def. 2.10]

[32] Hier muss natürlich kurz die Definition des Faserprodukts von gruppoidwertigen Funktoren erwähnt werden.

[33] etwa [Ar74, Def. 5.1]

[34] etwa [Go99, Prop. 2.19]; das kürzeste Argument wendet die Darstellbarkeit von Isom auf die beiden Familien über $X \times Y$ an, die man aus $X \to \mathcal{M}$ und $Y \to \mathcal{M}$ erhält

[35] Die Liste der Voraussetzungen ist ganz analog zu Satz 4 und hier deshalb nicht nocheinmal aufgeführt.