PROGRAMM ZUM WORKSHOP ÜBER TORISCHE EINBETTUNGEN
am 25.2.98 in Köln und am 14.3.98 (??) in Bonn
(erster Teil)

Der erste Teil des Workshops, in dem es um die allgemeine Theorie torischer Einbettungen geht, orientiert sich im wesentlichen an [KKMS], ergänzt durch [Fu] und [Da]. Für einige neuere Entwicklungen lohnt es sich auch, [Cox] zu lesen.

Notationen: Im folgenden bezeichne k einen algebraisch abgeschlossenen Körper. Weiter sei T ein n-dimensionaler Torus über k, M sei seine Charaktergruppe, und N seine Cocharaktergruppe (beides freie $\mathbf{Z}$-Moduln vom Rang n, die in perfekter Dualität zueinander stehen).

1. Vortrag: Affine Einbettungen I

(1) Definition der Kategorie der äquivarianten affinen Einbettungen (bzw. der äquivarianten Einbettungen) von T im Sinne von [KKMS] I, Definition 1 (im folgenden auch kürzer affine T-Einbettungen (bzw. T-Einbettungen) genannt).
(2) Definition der Kategorie der endlich erzeugten Halbgruppen in M, die M als Gruppe erzeugen (Morphismen sind Halbgruppen-Homomorphismen, die mit der Inklusion nach M verträglich sind, also einfach Inklusionen von Unterhalbgruppen von M); Definition des (kontravarianten) Funktors von dieser Kategorie in die der affinen T-Einbettungen; Beweis, daß dies eine Kategorien-Äquivalenz ist ([KKMS]).
(3) Definition eines konvexen rationalen Polyederkegels in $N_{\mathbf{R}}$, des dualen Kegels in $M_{\mathbf{R}}$ und Beweis der bijektiven Korrespondenz zwischen (strikt) konvexen rationalen Polyederkegeln (strikt = enthält keinen linearen Unterraum) in $N_{\mathbf{R}}$ und der Menge der endlich erzeugten saturierten (Definition!) Unterhalbgruppen von M (die M als Gruppe erzeugen) (neben [KKMS] I, Lemma 2 vgl. auch [Fu] 1.2, eventuell Gordan's Lemma nur zitieren).
(4) Definition der Begriffe "Seite", "Inneres einer Seite", "Facette" (= Seite der Codimension 1) eines konvexen rationalen Polyederkegels.
(5) Beweis der Äquivalenz der Kategorie der strikt konvexen rationalen Polyederkgeln (mit Inklusionen als Morphismen) und der Kategorie affinen normalen T-Einbettungen (die Volltreuheit des Funktors ist der erste Teil von Theorem 3 aus [KKMS], I; für den Beweis, daß man die erhaltene T-Einbettung normal ist, siehe auch [Fu] 2.1).

2. Vortrag: Affine Einbettungen II

(1) Letzte Aussage von Theorem 1‘ und Theorem 2 aus [KKMS], I. (möglichst vollständiger Beweis).
(2) Als Korollar aus (1) den zweiten Teil von Theorem 3 (Inklusion einer Seite entspricht offener Immersion).
(3) Erläuterung von (1) und (2) an einem trivialen Beispiel.
(4) Beweis des Glattheitskriteriums für T-Einbettungen ([KKMS] Theorem 4).
(5) Das Beispiel aus [KKMS], p.16 für $n = 2$ (siehe auch [Fu] 2.2).

3. Vortrag: Allgemeine torische Varietäten

(1) Definition eines Fächers Δ in N (in [KKMS] endliche rationale partielle Polyeder-Zerlegung von N genannt; hier ist eine kleine Ungenauigkeit in [KKMS], da dort nicht gefordert wird, daß die Kegel streng konvex sind; vgl. auch [Fu] 1.4).
(2) Konstruktion der zu einem Fächer Δ assoziierten normalen T-Einbettung $X(\Delta)$ ([KKMS], chap. I, zwischen Definition 3 und Theorem 6).
(3) Definition die Kategorie der Fächer in N und Beweis, daß die Konstruktion in (2) eine Kategorien-Äquivalenz liefert ([KKMS],I, Theorem 6(i) und Theorem 7 (man beachte, daß der Morphismus zwischen den T-Einbettungen in Theorem 7 eindeutig ist), Theorem 5 kann leider aus Zeitgründen nur als unbewiesenes Lemma zitiert werden). [KKMS] I, Theorem 6(ii),(iii) als Zusätze.
(4) Definition eines glatten Fächers als ein Fächer, dessen Kegel alle durch eine Basis des Gitters N erzeugt werden. Bemerkung, daß ein Fächer Δ genau dann glatt ist, wenn $X(\Delta)$ glatt ist (folgt sofort aus dem 2. Vortrag (4)).
(5) Definition eines vollständigen Fächers Δ ([Fu] 2.4) und Theorem 8 aus [KKMS],I (für den Beweis siehe auch [Fu] 2.4).

(6) Beispiele so lang die Zeit reicht (mindestens den projektiven Raum, bestimme auch Orbiten und T-invariante offene affine Teilmengen).

4. Vortrag: Auflösung von Singularitäten torischer Einbettungen

Zur Auflösung der Singularitäten stützen wir uns auf [Fu] 2.6 und [Da] 8. Leider sind beide Quellen ziemlich kurz gehalten, so daß noch einiges an Arbeit investiert werden muß. Das Verfahren in [KKMS], ausführlich beschrieben in [Br], erscheint mir aber wesentlich komplizierter, wenn sie auch präzisere Ergebnisse liefert. Außerdem hat die Vorgehensweise in [Fu] und [Da] den Vorteil, daß sie sehr konstruktiv ist.

(1) Definition der Verfeinerung eines Fächers und die Bemerkung, daß der korrespondierende Morphismus birational und eigentlich ist.
(2) Definition einer elementaren Verfeinerung ([Da] 8.1) und Reduktion auf den Fall, daß alle Kegel simplizial (Definition [Da] 1.1) sind.
(3) Definition der Multiplizität eines simplizialen Kegels ([Fu] p. 48) und die Bemerkung, daß Glattheit äquivalent zu Multiplizität Eins ist. Beschreibung des Verfahrens zum schrittweisen Senken der Multiplizität ([Fu] p.48 und [Da] 8.2, den Gittersatz von Minkowski nur zitieren).
(4) Aus (2) und (3) folgt, daß man die Singularitäten einer torischen Varietät in der Kategorie der torischen Varietäten auflösen kann. Genauer gilt sogar Remark 8.3 in [Da] (nur zitieren, folgt aus [KKMS]).
(5) Erläuterung des Prozesses der Auflösung von Singularitäten an einem zwei-dimensionalen Beispiel (z.B. [Fu] p. 45-47) (unter Verwendung der Ergebisse vom 2. Vortrag (5)).

5. Vortrag: Linienbündel auf torischen Varietäten

Es sei Δ ein Fächer in N, und X sei die zugehörige T-Einbettung.

(1) Knappe Wiederholung der Grundbegriffe torischer Varietäten.
(2) Beschreibung von $\mathrm{Pic}(X)$ nach [Da] 6.1, 6.2 und 6.4.
(3) Beschreibung der globalen Schnitte einer invertierbaren Garbe auf X.
(4) Berechnung der Picard-Gruppe von $\mathbf{P}^1$, und der globalen Schnitte von $\mathbf{O}(n)$ als Anwendung von (2) und (3).
(5) Amplizitätskriterium für Linienbündel auf X ([Da] 6.7 und 6.9). Erläuterung am Beispiel des $\mathbf{P}^1$.

5.-8. Vortrag: Toroidale Kompaktifizierung vom Siegelschen Halbraum modulo einer arithmetischen Untergruppe

Dies wird in Kürze nachgereicht.

Bibliographie

[Br] J.L. Brylinski: *Eventails et Varietes toriques*, Semin. sur les singularites des surfaces, Cent. Math. Ec. Polytech., Palaiseau 1976-77, Lect. Notes Math. 777, 247-288 (1980).

[Cox] D.A. Cox: *Recent Developments in toric Geometry*, preprint auf dem Alg-Geom-Server, 9606016 (WWW-Adresse: http://xxx.lanl.gov/abs/alg-geom/9606016)

[Da] V.I. Danilov: *The Geometry of Toric Varieties*, Russian Math. Surveys **33**:2 (1978), 97–154

[Fu] W. Fulton: *Introduction to Toric Varieties*, Annals of Mathematics Studies **131**, Princeton University Press, 1993

[KKMS] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, B. Saint-Donat: *Toroidal Embeddings I*, Lect. Notes Math. **339**, Springer, 1973