WORKSHOP ÜBER SHIMURA-VARIETÄTEN

am 22.11.97 in Aachen und am 6.12.97 in Bonn

Notationen: Im folgenden bezeichne $\mathbf{S} = \mathrm{Res}_{\mathbf{C}/\mathbf{R}}(\mathbf{G}_m)$ den Deligne-Torus, und G bezeichne eine reduktive Gruppe über $\mathbf{Q}$ (für unsere Zwecke sind alle reduktiven Gruppen zusammenhängend).

1. Vortrag: Reine Hodge-Strukturen

(1) Aussagen von [De]1.1.1: Definition von reellen Hodge-Strukturen, Äquivalenz der Kategorie der reellen Hodge-Strukturen und der Kategorie der endlich-dimensionalen Darstellungen von $\mathbf{S}$ (mit den Konventionen von [De]1.1.1). Definition der Gewichtsgraduierung und der Hodge-Filtrierung. Hodge-Strukturen über $A = \mathbf{Z}$ und $A = \mathbf{Q}$, Äquivalenz der Kategorie der A-Hodge-Strukturen und der Kategorie der endlich erzeugten Moduln V über A zusammen mit einer Darstellung von $\mathbf{S}$ auf $V_{\mathbf{R}}$, so daß die Gewichtsgraduierung bereits über A definiert ist.

(2) Beispiele [De] 1.1.3 und 1.1.5

(3) Definition polarisierbarer Hodge-Strukturen ([De] 1.1.10)

(4) Beispiel: Äquivalenz der Kategorie der abelschen Varietäten über $\mathbf{C}$ und der Kategorie der polarisierbaren $\mathbf{Z}$-Hodge-Strukturen vom Typ $\{(-1,0),(0,-1)\}$ ([De] 1.1.4 plus [Mu] p.35, Cor. (die Aussage in [Mu] sollte nur zitiert werden)).

(5) Erläuterung der Entsprechung von lokalen Systemen auf einer komplexen Mannigfaltigkeit X und von holomorphen Vektorbündeln auf X mit integrablem Zusammenhang. Definition einer (polarisierten) Variation von Hodge-Strukturen vom Gewicht n auf einer komplexen Mannigfaltigkeit X als lokales System von $\mathbf{Z}$-Moduln $V_{\mathbf{Z}}$ mit einer Filtrierung $F^\bullet$ des zugehörigen Vektorbündels (und einer Abbildung lokaler Systeme $\psi : V_{\mathbf{Z}} \times V_{\mathbf{Z}} \to \mathbf{Z}(-n)$), so daß:
  (a) Griffiths-Transversalität
  (b) Für alle $x \in X$ ist (sind) $F^\bullet_x$ (und ψ_x) auf $V_{\mathbf{Z},x}$ eine (polarsierbare) $\mathbf{Z}$-Hodgestruktur vom Gewicht n.

2. Vortrag: Definition eines Shimura-Datums

(1) Sei X' eine $G(\mathbf{R})$-Konjugationsklasse von $\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathbf{S}, G_{\mathbf{R}})$. Auf ihr operiert $G(\mathbf{R})$ transitiv, und man erhält daher auf X' die Struktur einer reellen Mannigfaltigkeit.

(2) Sei nun X eine Zusammenhangskomponente von X', und sei V eine treue Darstellung von G über $\mathbf{R}$. Dann liefert jedes $h \in X$ eine reelle Hodge-Struktur auf V, und es sind äquivalent:
  (a) Die Gewichtsgraduierung auf V ist unabhängig von h.
  (b) $h(\mathbf{R}^\times) \subset G(\mathbf{R})^+$ ist zentral für alle (oder auch für ein) $h \in X$ (hierbar bezeichnet H^+ die topologische Zusammenhangskomponente einer topologischen Gruppe H).
  (c) Die adjungierte Darstellung von $\mathbf{S}$ auf $\mathrm{Lie}(G_{\mathbf{R}})$ ist vom Gewicht 0.

(3) Definition einer Cartan-Involution auf einer reellen algebraischen Gruppe ([De] 1.1.14, letzter Absatz) und die Aussage von [De] 1.1.15 (evtl. mit kurzer Beweisskizze).

(4) Es seien die äquivalenten Bedingungen aus (2) erfüllt. Dann gilt (Beweis in [De] 1.1.14 und auch (in allgemeinerer Version) in [Pi] 1.7ff):
  (a) Es existiert eine eindeutig bestimmte komplexe Struktur auf X, so daß die Hodge-Filtrierung $F^\bullet V_{\mathbf{C},h}$ durch holomorphe Unterbündel von $V \otimes O_X$ induziert wird.
  (b) Äquivalent sind:
  (b1) Für eine geeignete holomorphe Struktur sind die $V_{\mathbf{C},h}$, $h \in X$ eine Variation von HS.
  (b2) Für alle $h \in X$ definiert $Ad \circ h$ eine HS auf $\mathrm{Lie}(G)$ vom Typ $\{(-1,1),(0,0),(1,-1)\}$.
  (c) Äquivalent sind:
  (c1) Ist V^n Komponente vom Gewicht n in V, so existiert ein Morphismus $\psi : V^n \times V^n \longrightarrow \mathbf{R}(-n)$, so daß ψ_h eine Polarisierung von $V_{\mathbf{C},h}$ ist.
  (c2) Sei $G_1 \subset G$ die kleinste Untergruppe, die über $\mathbf{R}$ definiert ist, durch die alle $h \in X$ faktorisieren. Dann ist G_1 reduktiv und $\mathrm{int}(h(i))$ ist eine Cartan-Involution von G_1^{ad}.

3. Vortrag: Definition von Shimura-Daten und des assoziierten komplexen Raums, Wiederholung aus der Theorie der algebraischen Gruppen über arithmetischen Körpern

(1) Definition der Kategorie der Shimura-Daten als die Kategorie der Paare (G, X), die den Bedingungen [De] 2.1.1.1 – 2.1.1.3 genügen (Morphismen sind Homomorphismen $f: G \to G'$, die X nach X' schicken). Definition einer Einbettung von Shimura-Daten, d.h. wenn obiges f injektiv ist. Bemerkung, daß die Kategorie der Shimura-Daten Produkte besitzt.

(2) Für jeden Morphismus $\varphi: (G_1, X_1) \longrightarrow (G_2, X_2)$ von Shimura-Daten ist die induzierte Abbildung $\psi: X_1 \longrightarrow X_2$ eine holomorphe Abbildung. Sie ist eine abgeschlossene Immersion, wenn φ eine Einbettung von Shimura-Daten ist.

(3) Beispiele von Shimura-Daten:
   (a) GL_2
   (b) Der Fall eines Torus $G = T$.

(4) Wiederholung der Topologie auf $G(\mathbf{A}_f)$, Definition des komplexen Raums $Sh_K(G, X)$ (in [De] mit ${}_K M_{\mathbf{C}}(G, X)$ bezeichnet), assoziiert zu einem Shimura-Datum (G, X) und einer kompakten offenen Untergruppe $K \subset G(\mathbf{A}_f)$.

(5) Wiederholung aus der Theorie der algebraischen Gruppen über arithmetischen Körpern (ohne Beweis):
   (a) Angabe des reellen Approximitationssatzes, d.h. sei G eine zusammenhängende lineare algebraische Gruppe. Dann ist $G(\mathbf{Q}) \subset G(\mathbf{R})$ dicht.
   (b) Starker Approximationssatz ([PR] 7.4, speziell die Einleitung und Theorem 7.12)
   (c) Endlichkeit der Shafarevich-Tate-Gruppe für lineare algebraische Gruppen ([PR] Theorem 6.15 oder Theorem 6.19).
   (d) Galois-Cohomologie halbeinfacher Gruppen über lokalen Körpern ([PR] Theorem 6.20 und Korollar) (evtl. kurze Wiederholung der universellen Überlagerung einer halbeinfachen Gruppe)
   (e) Shafarevich-Tate-Gruppe für einfach zusammenhängende Gruppen ([PR] Theorem 6.4 und Theorem 6.6)

4. Vortrag: Algebraizität von $Sh_K(G, X)$

(1) Beweis, daß $Sh_K(G, X)$ die disjunkte Vereinigung von hermitesch symmetrischen Räumen (Definition!) ist. Genauer: $\pi_0(Sh_K(G, X))$ ist ein prinzipal homogener Raum unter $G(\mathbf{R})/G(\mathbf{R})^+$ und jede Zusammenhangskomponente ist von der Form $\Gamma_g \backslash X^+$ (siehe [De] 2.1.2 und [Mi] 2). Zitat aus [BB], daß dies die $\mathbf{C}$-wertigen Punkte einer quasiprojektiven Varietät sind (kurze Beweisskizze). Im weiteren wird dieses quasiprojektive Schema ebenfalls mit $Sh_K(G, X)$ bezeichnet.

(2) Verdeutlichung des Punktes (1) am Beispiel der GL_2.

(3) Definition von $Sh(G, X)$ als projektiver Limes der $Sh_K(G, X)$ (dies ist wieder ein Schema über $\mathbf{C}$). Angabe der $\mathbf{C}$-wertigen Punkte von $Sh(G, X)$ ([De] 2.1.10), $Sh(G, X)/K = Sh_K(G, X)$ und Definition der $G(\mathbf{A}_f)$-Rechtsoperation auf $Sh(G, X)$ ([De] 2.1.4).

5. Vortrag: Kanonisches Modell für Tori

(1) Sei $E \subset \mathbf{C}$ ein Körper. Definition eines Modells M von $Sh(G, X)$ über E ([De1] 3.2 und 3.1).

(2) Einschub über Konjugationsklassen von 1-Parameter-Untergruppen (zusammenhängender) reduktiver Gruppen: Sei G eine (zusammenhängende) reduktive Gruppe über einem Körper k, und sei K eine algebraisch abgeschlossene Erweiterung von k. Dann entsprechen die $G(K)$-Konjugationsklassen $\mathcal{M}_G$ von Homomorphismen $\mathbf{G}_{m,K} \to G_K$ gerade der Menge Y/Ω, wobei Y die Cocharaktergruppe eines maximalen Torus von G_K und Ω seine Weylgruppe ist. Insbesondere hängt diese Menge nicht von K ab. Beweis, daß auf dieser Menge $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ operiert.

(3) Sei (G, X) ein Shimura-Datum. Für $h \in X$ definiere den Reflexkörper $E = E(G, X) \subset \mathbf{C}$ von der Konjugationsklasse von μ_h ([De] 2.2.1). Ist $f: (G, X) \to (G', X')$ ein Morphismus von Shimura-Daten, so gilt $E(G', X') \subset E(G, X)$.

(4) Reziprozitätsabbildung für Tori ([De] 2.2.3) (ausführliche Erklärung - so weit Zeit vorhanden -, auch der dahintersteckenden Klassenkörpertheorie). Kanonisches Modell für ein Shimura-Datum der Form $(T, \{h\})$, wobei T ein Torus über $\mathbf{Q}$ ist.

6. Vortrag: Allgemeines kanonisches Modell

(1) Sei (G, X) ein Shimura-Datum mit Reflexkörper E. Definition eines speziellen Punktes, Definition des Typs eines speziellen Punkts und Definition der Operation von $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/E)$ auf der Menge der speziellen Punkte eines bestimmten Typs ([De] 2.2.4).

(2) Definition des kanonischen Modells für ein beliebiges Shimura-Datum (G, X).
(3) Funktorialität und Eindeutigkeit des kanonischen Modells ([Mi] 5.2 und 5.3, [De1] 5.1–5.5)
(4) Relative Existenz des kanonischen Modells (im Sinne von [De1] 5.7)

7. Vortrag: Der Siegel-Fall

(1) Sei nun $G = GSp_{2g}$ (Definition!), definiere $h: \mathbf{S} \to G_{\mathbf{R}}$ durch $x + iy \mapsto \begin{pmatrix} xI_g & yI_g \\ -yI_g & xI_g \end{pmatrix}$, und sei X die $G(\mathbf{R})$-Konjugationsklasse. Dies ist die Vereingung von oberem und unterem Siegel-Halbraum $\mathcal{H}_g^{\pm}$, d.h. X ist gleich der Menge der symmetrischen Matrizen $A \in M_g(\mathbf{C})$, so daß $\mathrm{Im}(A)$ positiv oder negativ definit ist. Beweis, daß dies ein Shimura-Datum definiert.
(2) Betrachte $K = Sp_{2g}(\hat{\mathbf{Z}})$. Dann gehört zur Zusammenhangskomponente $\mathcal{H}_g^+$ die arithmetische Gruppe $\Gamma = Sp_{2g}(\mathbf{Z})$ (im Sinne vom 4. Vortrag (1)). Beweisskizze, daß $\Gamma \backslash \mathcal{H}_g^+$ algebraisierbar ist [Fr] Kap. II, besonders die Übersicht (1. Schritt: Definition der Satake-Kompaktifizierung $\bar{X}$ als topologischer Raum; 2. Schritt: Analytifizierung von $\bar{X}$; 3. Schritt: Einbettung von $\bar{X}$ in einen projektiven Raum durch geeignete Poincaré-Reihen). Evtl. vollständiger Beweis im Fall $g = 1$.
(3) Berechnung des Reflexkörpers von (G, X) $(= \mathbf{Q})$.
(4) Definition des Modulraums $\mathbf{A}_{g,N}$ über $\mathbf{Q}$ der prinzipal polarisierten abelschen Varietäten der Dimension g mit Level-N-Struktur ([De1] 4.16) (nur kurz, der Begriff einer prinzipal polarisierten abelschen Varietät wird als bekannt vorausgesetzt; eine gute Definition findet sich in [Mu1] Kap. 6 und [DP] §1). $\mathbf{A}_{g,N}$ ist ein Schema für $N \geq 3$. Beweis, daß der projektive Limes der $\mathbf{A}_{g,N}$ ein Modell von $Sh(G, X)$ ist ([De1] 4.16 und 4.17).
(5) Beweis, daß der projektive Limes der $\mathbf{A}_{g,N}$ ein kanonisches Modell von $Sh(G, X)$ ist ([De1] 4.21) (zumindest skizzieren).

8. Vortrag: Der Fall der unitären Gruppe

(1) Allgemeine Definition von Shimura-Daten vom Hodge-Typ ([Mi] p.335 nach Theorem 3.11). Aus dem 6. Vortrag (4) folgt dann, daß $Sh(G, X)$ für ein Shimura-Datum (G, X) vom Hodge-Typ ein kanonisches Modell besitzt.
(2) Definition des Shimura-Datums zu einer unitären Gruppe G.
(3) Berechnung des Reflexkörpers durch Angabe der Cocharaktergruppe (eines maximalen Torus) von G, der Weylgruppe, und der Galois-Operation.
(4) Definition des assoziierten Modulproblems, und Beweis, daß dies ein Modell ist.

Bibliographie

[BB] W. Baily, A. Borel: *Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains*, Ann. of Math. (2) **84**, 442–528, 1966
[De] P. Deligne: *Variétés de Shimura: Interprétation modulaire, et techniques de construction de modèles canoniques*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics Vol. **33**, part 2, pp. 247–290, 1979
[De1] P. Deligne: *Traveaux de Shimura*, Seminaire Bourbaki, no 389, 1971
[DP] P. Deligne, G. Pappas: *Singularités des espaces de modules de Hilbert, en les caractéristiques divisant le discriminant*, Comp. Math. **90**, 59–79, 1994
[Fr] E. Freitag: *Siegelsche Modulfunktionen*, Springer Verlag: Heidelberg, 1983
[Mi] J.S. Milne: *Canonical Models of (Mixed) Shimura Varieties and Automorphic Vector Bundles* in Automorphic Forms, Shimura-Varieties, and L-functions Vol. I, pp. 283–414, Academic Press: San Diego, 1988
[Mu] D. Mumford: *Abelian Varieties*, Oxford University Press: Oxford, 1970
[Mu1] D. Mumford: *Geometric Invariant Theory*, Springer Verlag: Heidelberg, 1965
[Pi] R. Pink: *Arithmetical compactification of mixed Shimura varieties*, Bonner mathematische Schriften: Bonn, 1989
[PR] V. Platonov, A. Rapinchuk: *Algebraic Groups and Number Theory*, Academic Press: San Diego, 1994