PROGRAMM ZUM WORKSHOP ÜBER SCHNITTTHEORIE
am 25.4.98 in Köln und am 16.5.98 in Bonn

Das Programm richtet sich im wesentlichen nach dem Buch vom Fulton [Fu]. Leider müssen wir aus Zeitgründen auf eine Wiederholung grundlegender Fakten aus der kommutativen Algebra (besonders Länge, Flachheit, reguläre Sequenzen, Tiefe) verzichten. Während natürlich jeder die verwendenden Eigenschaften einfach glauben mag, sollten die Begriffe jedoch vertraut sein. Sie können in konzentrierter Form im Anhang A von [Fu] nachgelesen werden oder auch in jedem gutem Buch über kommutative Algebra (z.B. Matsumura, Eisenbud, Bourbaki, EGA).

Eine generelle Anmerkung zum folgenden Programm: Alle Angaben beziehen sich auf [Fu]. Sind ganze Abschnitte angegeben, so ist immer alles aus den Abschnitten bis auf die Beispiele gemeint. Alle Beispiele aus [Fu], die wir benötigen, sind explizit im Programm angegeben (ich hoffe, ich habe keines übersehen). Äußerst hilfreich bei der Vorbereitung war mir eine Vorlesungsmitschrift einer Vorlesung von Klaus Künnemann.

Notationen: Im folgenden bezeichne K einen Körper. Ein *Schema* ist immer ein separiertes Schema von endlichem Typ über K, und eine *Varietät* ist ein integres Schema. Insbesondere ist eine Untervarietät eines Schemas X ein integres Unterschema von X.

1. Vortrag: Zykel und Rationale Äquivalenz (90 Minuten)

(1) Definition der Ordnungsfunktion (Abschnitt 1.2)
(2) Definition von Zykeln, von rationaler Äquivalenz, etc. (der ganze Abschnitt 1.3 plus den Beispielen (1.3.1) und (1.3.2)).
(3) Push-forward (Abschnitt 1.4), beim Beweis der Proposition sich je nach Zeit eventuell auf Fall (a) oder (b) beschränken; die Gradabbildung werde bei uns mit deg bezeichnet (nicht mit $\int$).
(4) Zykel von Unterschemata (Abschnitt 1.5), Beispiel (1.5.1) (eventuell ohne Beweis)
(5) Alternative Definition von rationaler Äquivalenz (Abschnitt 1.6)
(6) Pull-back (Abschnitt 1.7); die Bemerkungen zu Flachheit zu Beginn von 1.7 kann man sich sparen, allerdings nicht die Anmerkung, daß flache Morphismen hier immer eine konstante relative Dimension haben; Lemma 1.7.1 und Prop. 1.7 ohne Beweis, Theorem 1.7 nur auf Lemma 1.7.2 zurückführen.
(7) Die zu einer abgeschlossenen Teilmenge assoziierte exakte Sequenz (Abschnitt 1.8)
(8) Surjektivität des pull-backs bei affinen Bündeln (Abschnitt 1.9); je nach Zeit Beweis fortlassen oder nur für das triviale Bündel. Korollar über die Gestalt von $A_k(\mathbf{A}^n)$.
(9) Äußere Produkte (Abschnitt 1.10)

2. Vortrag: Divisoren (70 Minuten)

(1) Kurze Wiederholung von Divisoren (wie zu Beginn von (Abschnitt 2.1)). Im Gegensatz zum [Fu] bezeichnen wir die linearen Äquivalenzklassen von Cartier-Divisoren auf einem Schema X mit $\mathrm{DivCl}(X)$, während $\mathrm{Pic}(X)$ wie üblich die Menge der Isomorphieklassen von Linienbündeln auf X bezeichnet (die kanonische Injektion $\mathrm{DivCl}(X) \to \mathrm{Pic}(X), D \mapsto O_X(D)$ ist allerdings ein Isomorphismus, wenn X reduziert oder wenn X quasiprojektiv ist). Beispiel 2.1.1.
(2) Pseudo-Divisoren. Es bezeichne $\mathrm{PDiv}(X)$ die Menge der Pseudo-Divisoren. Verknüpfung von Pseudo-Divisoren ($\mathrm{PDiv}(X)$ keine Gruppe!) und Pullback von Pseudo-Divisoren, Lemma 2.2 (ohne Beweis) und Definition 2.2.2
(3) Schnitt mit Pseudo-Divisoren (Abschnitt 2.3) ohne Remark 2.3.
(4) Kommutativität von Schnitt-Klassen (Abschnitt 2.4) (das Theorem 2.4 ist von zentraler Bedeutung, vom Beweis so viel wie möglich), Definition 2.4.2 und alles folgende im Abschnitt 2.4 kann weggelassen werden.

3. Vortrag: Segre- und Chern-Klassen (60 Minuten)

(1) *Ganz kurze* Wiederholung der Begriffe und Zusammenhänge von Vektorbündeln, lokal freien Moduln, projektiven Bündeln, kanonischen Linienbündeln auf projektiven Bündeln.
(2) Segre-Klassen von Vektorbündeln (Abschnitt 3.1), Prop. 3.1(e) auslassen (nehmen wir via (3) als Definition).
(3) Chern-Klassen von Vektorbündeln (Abschnitt 3.2). Beweis des Theorems 3.2 möglichst ausführlich, in jedem Fall aber das Zerfällungsprinzip angeben. Remark 3.2.2, 3.2.3 und 3.2.4 müssen (leider) weggelassen werden.
(4) Rationale Äquivalenz von Bündeln (Abschnitt 3.3), Prop. 3.3 kann weggelassen werden. Als Anwendung von Theorem 3.3 die Gestalt von $A_*(\mathbf{P}^n)$.

4. Vortrag: Kegel, Aufblasungen, reguläre Einbettungen, Deformation in den Normalenkegel (75 Minuten)

(1) Definition der Begriffe "Kegel", "projektiver Kegel", "projektive Komplettierung eines Kegels", "Normalenkegels" und "Aufblasung" und die wichtigsten Eigenschaften (B5.1 – B5.4, B6.1 – B6.9 in Kurzform).
(2) Definition regulärer Einbettungen und von l.c.i.-Morphismen (beachte, dass hier l.c.i.-Morphismen global eine Faktorisierung in eine reguläre Immersion und einen glatten Morphismus besitzen müssen). Erste Eigenschaften (B7.1 – B7.6 in Kurzform).
(3) Formulierung der Deformation als Satz, und Beweis (Abschnitt 5.1), Beschreibung dieser Deformation nach MacPherson (Remark 5.1.1) kann eventuell weggelassen werden.
(4) Spezialisierung in den Normalenkegel (Abschnitt 5.2)
(5) Anwendungen: Definition des Gysin-Homomorphismus (Example 5.2.1); Definition des Schnittprodukts auf einer glatten Varietät (Example 5.2.1 (e)).

5. Vortrag: Schnittprodukte (60 Minuten)

(1) Die grundlegende Konstruktion: Definition von $X \cdot_Y V = X \cdot V$ wie im Abschnitt 6.1 (Prop. 6.1 und alles folgende kann weggelassen werden).
(2) Definition des verfeinerten Gysin-Homomorphismus.
(3) Eigenschaften des verfeinertern Gysin-Homomorphismus (Theorem 6.2, Theorem 6.3, Korollar 6.3 und Selbstschnittformel, Prop. 6.3, Theorem 6.4, Theorem 6.5). Nur einen Punkt genau beweisen, den Rest ohne Beweis.
(4) Definition des Gysin-Morphismen für l.c.i.-Morphismen und Prop. 6.6

6. Vortrag: Schnitte auf glatten Varietäten (60 Minuten)

Dieser Vortrag ist nicht notwendig für die folgenden. Ohne ihn wäre die Schnitttheorie aber wohl kaum vollständig. Der Vortragende hat daher die freie Wahl, wie er die Schwerpunkte setzt. Die folgenden Punkte sollten aber auf jeden Fall angesprochen werden:

(1) Das verfeinerte Schnittprodukt.
(2) Der Schnittring als Funktor $Y \mapsto A^*(Y)$.

7. Vortrag: Formulierung des Satzes von Grothendieck-Riemann-Roch (60 Minuten)

(1) Definition der Grothendieckgruppe der Vektorbündel und der kohärenten Garben auf einem Schema. Pullback. Push forward (bezüglich eigentlicher Morphismen), Projektionsformel, Gleichheit der Grothendieckgruppen auf regulären Schemata (wie in 15.1)
(2) Der Chern-Charakter (Example 3.2.3, die Chern-Nullstellen sind in Remark 3.2.3 definiert), Interpretation des Chern-Charakters als Homomorphismus $K(X) \to A(X)_{\mathbf{Q}}$ durch Schnitt mit $[X]$ und seine Charakterisierung wie in 15.1
(3) Die Todd-Klasse (Example 3.2.4)
(4) Formulierung des Satzes von Grothendieck-Riemann-Roch (Theorem 15.2) und Korollar des Riemann-Roch für Kurven (15.2.1)

8. Vortrag: Beweis des Satzes von Grothendieck-Riemann-Roch und Korollare (60 Minuten)

(1) Beweis von GRR.
(2) Korollare 15.2.1 und 15.2.2.
(3) Riemann-Roch für Flächen (Beispiel 15.2.2) und weitere Korollare so lang die Zeit reicht.

Bibliographie

[Fu] W. Fulton: *Intersection Theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3. Folge), Vol. 2, 2nd edition, Springer 1997