**Arbeitsgemeinschaft über**
**"Klassifikation algebraischer Gruppen"**
15. März in Bonn

Wie besprochen, soll es diesmal um die Klassifikation halbeinfacher algebraischer Gruppen über beliebigen Körpern gehen. Wir haben vor, wie folgt vorzugehen:

Im 1. Vortrag soll die Klassifikation halbeinfacher Gruppen über einem algebraisch abgeschlossenen Körper besprochen werden; da wahrscheinlich die meisten Teilnehmer dies irgendwie "kennen", dient der Vortrag als Erinnerung.
Stichworte: reduktive und halbeinfache Gruppen, maximale Tori, parabolische und Borel-Untergruppen, Konjugiertheitssätze; Wurzeln, Wurzelsysteme und -daten sowie Dynkindiagramm; Klassifikation der Dynkindiagramme und was dies für die Klassif. der fasteinfachen zusammenhängenden Gruppen bedeutet; Existenz der (einfach zusammenhängenden) Chevalleygruppen; Struktur der Automorphismengruppe, innere und Diagrammautomorphismen; wie sieht's für die Chevalleygruppen der Typen A-D aus?
Literatur: [Ti1, §1], [Sp, Kap. 1 §4], [PR, 2.1] sowie die Lehrbücher von Borel und Humphreys.
Dauer: 1 Stunde (oder kürzer)

Der 2. Vortrag soll skizzieren, welche "Verfeinerungen" notwendig sind, wenn man die Klassifikation über einem beliebigen Körper angeht.
Stichworte: Galoiskohomologie (deren Definition und elementare Eigenschaften wir als weitgehend bekannt voraussetzen), Formen und die erste Galoiskohomologie der Automorphismengruppe; relatives und absolutes Wurzelsystem; äussere und innere Formen; spaltende und quasispaltende Gruppen; Index und anisotroper Kern (und der Zusammenhang mit den analogen Begriffen für quadratische Formen); Oppositionsinvolution; Reduktion der Klassifikation auf den absolut fasteinfachen, einfach zusammenhängenden Fall. Erkläre die Notation ${}^{g}X^{t}_{n,r}$ und die "verbogenen Dynkindiagramme mit Kringeln"! Hinweis, daß es "Zulässigkeitskriterien" für Indizes und Bedingungen an die anisotropen Kerne gibt, die stark vom Grundkörper abhängen (können). Als Leitfaden sollte [Ti1, §2] und teilweise §3 dienen; man vergleiche die ausführlichere Darstellung in [Se]. Ferner [Sp, Kap.2 §6], [PR, 2.2] und [Kn2] sowie [Ha].
Es ist wohl nicht möglich, das ganze von Tits dargestellte Klassifikationsprogramm ausführlich zu erläutern, wenn noch etwas anderes besprochen werden soll; deshalb soll dieser zweite Vortrag starken Überblickscharakter tragen, insbesondere sollten Beweise (wenn überhaupt) nur knapp skizziert werden unter Auslassung aller Komplikationen.
Dauer: 75 Minuten oder weniger.

Beschränkt man sich auf die klassischen Gruppen (d.h. die mit abs. Dynkindiagramm A, B, C oder D), so ist von André Weil ein anderer Zugang zur Klassifikation angegeben worden, nämlich mit Hilfe von "halbeinfachen Algebren mit Involution". Dieser soll in den beiden folgenden Vorträgen dargestellt werden, wobei wir das Schwergewicht eher auf Ausführlichkeit einiger Beispiele als auf Vollständigkeit legen möchten. (Insbesondere nehmen wir die Charakteristik 2 heraus; hierzu vergleiche [Ti2].)

Im Vortrag 3 sollte zunächst an die Theorie zentraleinfacher Algebren über Körpern und die Brauergruppe erinnert werden. Man diskutiere dann (halbeinfache) Algebren mit Involution (erster und zweiter Art sowie von Typ 1 oder 2), gebe die aus Matrizenalgebren gewonnenen Beispiele an, die über algebraisch abgeschlossenem Körper schon alle Möglichkeiten ausschöpfen, und erkläre den Zusammenhang mit SL bzw. SO bzw. Sp bzw. SU. ([We, p. 593-6], [PR, 2.3].) Dann sollten einige Fälle aus [PR, 2.3.1-3] nach Wahl des/der Vortragenden sehr ausführlich diskutiert werden, wobei man auch die Indizes herleiten sollte. Hierzu finden sich in den Tabellen in [Ti1] und [Sp] Bemerkungen; man kann evtl. auch [Jo] heranziehen. Die Sätze Prop.2.12 bis 2.15 aus [PR] sollten vollständig angegeben werden. – Eine andere Quelle für diese Dinge ist [Kn1, 2.6].

Der Vortrag 4 hat dann zwei Aufgaben: Zum einen sollten die Sätze (Prop. 2.17-20) aus [PR, 2.3.4] angegeben und in mindestens einem, vielleicht zwei Fällen ausführlich hergeleitet werden; danach sollte man auf Existenzfragen über speziellen (Sorten von) Körpern eingehen; die Existenzfrage ist in eine Existenzfrage für gewisse Algebren "umformuliert" worden; Zusammenhang mit Brauergruppe und Klassifikation von (z.B.) quadratischen Formen; ein Vorschlag wäre: Kurz auf endliche Körper eingehen: Satz von Lang, alle Gruppen sind quasispaltend, die Brauergruppe ist trivial, nach Chevalley-Warning sind quadratische Formen in mehr als zwei Variablen isotrop..... Dann $p$-adische Körper (hierzu findet man etwas in [PR] sowie [Kn1, Prop. 4.1.1]; insbesondere die Resultate von Kneser über das Verschwinden der ersten Kohomologie für die einfach zusammenhängenden Gruppen sind von Interesse). Vielleicht etwas zu den reellen Zahlen? Hierzu siehe z.B. [Ge], und natürlich den zweiten Teil von [We]. Zu Zahlkörpern: hier wird höchstens eine Art Märchenstunde realisierbar sein. Man sollte die Bedeutung des Hasseprinzips betonen, [PR], [Ha] und [Kn1, Kap.5]. Bei der Gestaltung dieses Vortrags ist vieles der Lust und Laune (und dem Verantwortungsbewusstsein) der Vortragsperson überlassen.....
Dauer der Vorträge 3 und 4: jeweils 75 Minuten.

## Literatur


[PR] V. Platonov und A. Rapinchuk, *Algebraic Groups and Number Theory*, Academic Press

[Ti1] Jacques Tits, *Classification of algebraic semisimple groups*, pp. 33-62 in Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 9 (Boulder)

[Ti2] Jacques Tits, *Formes quadratiques, groupes orthogonaux et algèbres de Clifford*, Inv. Math. 5 (1968), 19–41

[Kn1] Martin Kneser, *Lectures on Galois cohomology of classical groups*, Lecture notes, Tata Institute (1969)

[Kn2] Martin Kneser, *Galoiskohomologie halbeinfacher algebraischer Gruppen über p-adischen Körpern I,II*, Math. Z. 88, 40–47, und Math. Z. 89, 250–277

[Sp] T. A. Springer, *Linear algebraic groups*, Teil 1 im Band "Algebraic Geometry 4" der Encyclopedia of the Mathematical Sciences (EMS)

[We] André Weil, *Algebras with involutions and the classical groups*, J. Indian Math. Soc. 24 (1960), 589–623 oder in den Oeuvres

[Ha] Günter Harder, *Bericht über neuere Resultate der Galoiskohomologie halbeinfacher algebraischer Gruppen*, Jahresberichte der DMV 70 (1968), 182–216

[Se] Martin Selbach, *Klassifikationstheorie halbeinfacher algebraischer Gruppen*, Bonner mathematische Schriften 83

[Ge] Thomas Geisser, *Galoiskohomologie reeller halbeinfacher algebraischer Gruppen*, Diplomarbeit Uni Bonn (1990)

[Jo] Lutz Joosten, *Die Indizes der klassischen Gruppen*, Diplomarbeit Uni Bonn (1974)

Bei Interesse kann man die letztgenannten Diplomarbeiten von Johannes Schlippe (s.u.) erhalten.

Nähere Informationen zur Anreise etc. folgen demnächst, zuerst aber erbitten wir viele, viele Meldungen von Vortragswilligen, möglichst bis zum Dienstag, dem 4. März, an

Joachim Dulinski (duli@mathA.rwth-aachen.de, Tel. 0241/80-4530)
Johannes Schlippe (johannes@math.uni-bonn.de, Tel. 0228/732842)