Arbeitsgemeinschaft über
“Arithmetik von Hilbert-Blumenthal-Flächen”

3. und 4. Oktober in Köln

Die ersten vier Vorträge sind für den ersten, die restlichen für den zweiten Tag gedacht.

1.+2.Vortrag: Hilbert-Blumenthal Flächen.
Ist F ein reellquadratischer Zahlkörper und $\Gamma = SL_2(\mathfrak{o}_F)$ bzw. eine Kongruenzuntergruppe, so löst der Quotient $\Gamma\backslash\mathbf{H}\times\mathbf{H}$ über den komplexen Zahlen das Modulproblem der abelschen Varietäten der Dimension 2 mit reeller Multiplikation (d.h. $\mathfrak{o}_F$ bettet sich in den Endomorphismenring ein), evtl. noch mit Levelstruktur. In der adelischen Formulierung nach Deligne ist dies eine Shimuravarität über $\mathbb{Q}$ mit einer stetigen G_f-Operation, wobei $G = R_{F/\mathbb{Q}}\mathrm{GL}(2)$. (Auf der Gruppe der Zusammenhangskomponenten operiert die Galoisgruppe nichttrivial, was über die Reziprozitätsabbildung der Klassenkörpertheorie beschrieben werden kann. Dies führt dazu, daß die Zusammenhangskomponenten, die mit Quotienten der obigen Form identifiziert werden, erst über einem abelschen Zahlkörper definiert sind.) Addiert man zu dem obigen Quotienten die Spitzen, so erhält man die Baily-Borel-Kompaktifizierung, eine normale projektive Varietät, welche i.a. Singularitäten enthält, die dann aufgelöst werden müssen.

Literatur: [R, §1+2], sowie [G, §1+2 und §9+10].

3. Vortrag: Kohomologie und Operation der Heckealgebra.
Betrachte $H^2_{et}(S_K \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_l)$ bzw. das Bild $H^2_!$ der Kohomologie mit kompaktem Träger darin als “interessanten” Teil der Kohomologie. Darauf operiert die Heckealgebra durch algebraische Korrespondenzen. Da S_K und die Operation der Heckealgebra über $\mathbb{Q}$ definiert sind, vertauscht die Operation mit derjenigen der Galoisgruppe. Außerdem ist die Operation der Heckealgebra halbeinfach (selbstadjungiert bzgl. dem Skalarprodukt) und man kann daher in irreduzible Teile zerlegen, die von der Galoisoperation respektiert werden. Also ist $H^2_! = \bigoplus_{\pi\in Coh(\mu)} H^2_\infty(\pi)\otimes\pi_f^K$ und $H^2_\infty(\pi)$ ist dann entweder 2- oder 4-dimensional, je nachdem ob es sich bei π_∞ um eine eindimensionale Darstellung oder eine diskrete Seriendarstellung handelt. Dies kann man einsehen, indem man mit der Betti-DeRham-Kohomologie vergleicht und diese mit der $(\mathfrak{g}, K)$-Kohomologie ausrechnet.

Evtl. kann zu diesem Vortrag noch die Beschreibung der Galoisdarstellungen im zweidimensionalen Fall aus dem vierten Vortrag hinzugenommen werden. Dies sollten die Vortragenden untereinander absprechen.

Literatur: [R, §3], [Ha], sowie [HLR, §1.8].

4.Vortrag: Galoisdarstellung und L-Funtionen.
Die $W_l := H^2(\pi)$, l prim, bilden ein kompatibles System l-adischer Darstellungen. Die diesem System zugeordnete L-Funktion liefert dann einen Bestandteil der Hasse-Weil-Zetafunktion von S_K, und mit Hilfe der Spurformel erkennt man, daß es sich

bei dieser L-Funktion um eine automorphe L-Funktion handelt. Man erhält so die vermuteten analytischen Eigenschaften (Fortsetzung, Pole etc.). Interessant ist noch die Integralformel (4.29), die wohl später noch genauer erläutert werden wird. Vor allen Dingen kann die Operation von Φ_p in Abhägigkeit von π_p beschrieben werden, und hier kann man auch ein bißchen zeigen, was wir das letzte Mal gelernt haben.

Literatur: [R, §4].

5.Vortrag: Tatevermutung und Hirzebruch-Zagier Zykel.
[R, §7+8]: Definition von Tatezykeln, Neron-Severi Gruppe, Hodezykeln, Lefschetz-kriterium und nebenbei den Fakt, dass S_K im algebraisch-geometrischen Sinne einfach zusammenhängend ist; Definition von Hirzebruch-Zagier Zykeln als eingebettete Modulkurven, was am übersichtlichsten adelisch behandelt werden kann.

6.Vortrag: Zerlegung der Galoisdarstellung.
Die 4-dimensionalen Galoisdarstellungen $W_l(\pi)$ über $\mathbb{Q}$ sind eigentlich nicht das, was man zu einer automorphen Form π bekommen will. Viel lieber hätte man eine 2-dimensionale Darstellung V_l über F, deren L-Funktion dann auch die "richtige" zu π ist. Man kann mittlerweile zeigen, daß V_l existiert, aber das ist eigentlich eine andere Geschichte ([W],[T]). W_l ist dann das Tensorprodukt von V_l mit seinem Galoistwist, und dies kann man auch auf einem Umweg erreichen, ohne V_l zu kennen, indem man ausnutzt, dass W_l in GO(4) liegt, was sich nicht zu sehr von GL$(2) \times$ GL(2) unterscheidet. Die W_l sind "irreduzibel", falls π nicht eine CM-automorphe Form ist. Dies sollte hier ebenfalls definiert werden.

Literatur: [R, §5 (§6+10)] und [HLR, §4].

7.+8.Vortrag: Beweis der Tatevermutung.
Kernpunkt sind die Propositionen 9.32 und 9.33 bei Ramakrishnan, d.h. die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) Existenz eines Tatezykels zu (π, ω).

(ii) (π, ω) entsteht durch Basiswechsel.

(iii) Der Verkettungsoperator T_ω ist nicht trivial auf π.

(iv) Die L-Funktion zu (π, ω) hat einen Pol in $s = 2$.

Falls noch Zeit verbleibt, könnte außerdem noch der Fall der CM-automorphen Form behandelt werden.

Literatur: [R, §9], [HLR, §2+3], und für den Rest [MR] und [K].

Literatur

[G] G. van der Geer, *Hilbert Modular Surfaces*, Ergebnisse, Springer Verlag.

[Ha] G. Harder, *Eisenstein cohomology of arithmetic groups. The case* $GL(2)$, Invent. Math. 89, 37-118 (1987).

[HLR] G. Harder, R. P. Langlands und M. Rapoport, *Algebraische Zykeln auf Hilbert-Blumenthal-Flächen*, J. reine angew. Math. 366, 53–120 (1986).

[K] Chr. Klingenberg, *Die Tate-Vermutungen für Hilbert-Blumenthal-Flächen*, Invent. Math. 89, 291-317 (1987).

[MR] V. Kumar Murty und D. Ramakrishnan, *Period relations and the Tate conjecture for Hilbert modular surfaces*, Invent. Math. 89, 319-345 (1987).

[R] D. Ramakrishnan, *Arithmetic of Hilbert-Blumenthal surfaces*, in: Number Theory, CMS Conference Proceedings, Vol. 7.

[T] R. Taylor, *On Galois representations associated to Hilbert modular forms*, Invent. Math. 98, No. 2, 265-280 (1989).

[W] A. Wiles, *On ordinary λ-adic representations associated to modular forms*, Invent. Math. 94, No. 3, 529-573 (1988).

Nähere Informationen zur Anreise etc. folgen demnächst, zuerst aber erbitten wir Meldungen von Vortragswilligen an

Dirk Feldhusen (dirk@math.uni-bonn.de, Tel. 0228/73-2003)
Joachim Dulinski (duli@mathA.rwth-aachen.de, Tel. 0241/80-4530)