PROGRAMM ZUM WORKSHOP ÜBER ARAKELOV-THEORIE
am 7.7.98 in Bonn und am 14.7.98 in Köln

Wie schon aus dem Titel ersichtlich ist, beschäftigen wir uns an diesem Workshop mit Arakelov-Theorie. Im wesentlichen richtet sich das Programm nach dem Buch von Soulé et al. ([S]), das auch eine sehr schöne Einleitung besitzt. Sehr lesenswert ist auch der Übersichtsartikel von Bost [Bo].

Um die Resultate in voller Allgemeinheit zu beweisen, benötigt man zum Teil sehr tiefliegende Resultate (vor allem aus der K-Theorie). Wir werden daher häufig die Ergebnisse zwar allgemein formulieren aber nur für Spezialfälle (oder leider gar nicht) beweisen.

Die Literaturangaben beziehen sich häufig fast nur auf [S], doch dort ist alles sehr knapp gehalten. Andere Referenzen, die man konsultieren kann, sind [GS], [Bo], [BGS].

Beim ersten Treffen werden die arithmetischen Chowgruppen und Arakelov-Varietäten definiert. Beim zweiten Treffen wird es dann um Beispiele und Anwendungen gehen, genauer um eine Vermutung von Bogolomov.

1. Vortrag: Schnitttheorie auf regulären Schemata (80 Minuten)

Der erste Teil ((1) und (2)) dieses Vortrags hat (neben der Festlegung einiger Sprechweisen) eher einen Übersichts- und Motivationscharakter. Im zweiten Teil wird dann kurz die Schnitttheorie für reguläre Schemata eingeführt. Leider können die Methoden aus dem Fulton vom letzten Workshop nicht auf beliebige reguläre Schemata verallgemeinert werden (vgl. auch die Einleitung zu [S] chap. I). Um nicht zu tief in die K-Theorie einzusteigen, werden wir das allgemeine Schnittprodukt zwar formulieren aber nur einen Spezialfall beweisen.

(1) Definition einer arithmetischen Varietät und eines hermiteschen Bündels darauf [Bo] 1.1.

(2) Arakelovgrad und Höhe eines Punktes einer arithmetischen Varietät ([Bo] 1.2), kurze motivierende Bemerkung, weswegen man die unendlichen Stellen dazunehmen muß, und Vergleich zum Funktionenkörperfall (siehe auch [S] 0.2).

(3) Chowgruppen ([S] I.2) und die Schnittpaarung. Im Gegensatz zum letzten Workshop benutzen wir diesmal durchweg die etwas üblichere Notation $CH^p(X)$ (anstatt $A^p(X)$). Höhepunkt dieses Abschnitts ist die Formulierung von [S] I, Theorem 2.

(4) Konstruktion der Schnittpaarung im Fall, daß X glatt über einem ein-dimensionalen regulären Schema S und daß $Y = Z = X$ ist (Bezeichnungen aus [S] I, Theorem 2) nach [Fu] Kap. 20:
   (a) Übertragung der Kovarianz für eigentliche Morphismen, der Kontravarianz für flache Morphismen etc. ([Fu] p.394 Zeile-5 bis p.395 Zeile-14) in Kurzform, Erläuterung der Schwierigkeiten beim äußeren Produkt.
   (b) Definition des äußeren Produkts bei glatten Schemata über ein-dimensionalen regulären Basen ([Fu] 20.2, Prop. 20.2 ohne Beweis).
   (c) Definition der Schnittpaarung (in diesem Fall sogar ganzzahlig möglich).

(5) Falls noch Zeit ist: (sehr) grobe Skizze des allgemeinen Beweises und (eventuell mündliche) Erläuterung, warum man im allgemeinen die Schnittpaarung nur rational hat.

2. Vortrag: Greensche Ströme (90 Minuten)

(1) Einführung der grundlegenden Notationen, Ströme ([S] II,1.1 und 1.2).

(2) Greensche Ströme ([S] II, 1.3), Erläuterung der Hodge-Zerlegung, Beweis des $\partial\bar{\partial}$-Lemmas, Theorem 1 mit Beweis.

(3) Definition von Linienbündeln mit hermitescher Metrik und seiner 1. Chernform und Konstruktion des assoziierten Greenschen Stroms ([S] II, 1.4), Theorem 2 ohne Beweis.

(4) Greensche Formen von logarithmischen Typ ([S] II,2): glatte Formen vom logarithmischen Typ und ihre Funktorialitäten (Lemma 2 mit Beweis, zumindest eine der beiden Aussagen); Theorem 3 ohne Beweis (eventuell mit Beweisskizze); mindestens eines der beiden Beispiele in 2.3.

(5) Das $*$-Produkt von Greenschen Strömen ([S] II,3), heuristische Formulierung (wie in der Einleitung von Kapitel II), Theorem 4 (siehe auch [GS] 2.1.4) ohne Beweis, die Assoziativität und die Kommutativität des $*$-Produkts ebenfalls ohne Beweis, aber mittels der heuristischen Formulierung plausibel machen.

3./4. Vortrag: Arithmetische Chowgruppen (135 Minuten, kann auch von einem alleine (mit Pause) gehalten werden, ansonsten sollten sich die beiden Vortragenden über die Aufteilung absprechen, z.B. (1)–(3) und (4)–(6))

(1) Definition der arithmetischen Chowgruppen ([S] III,1), Theorem 1 nur die trivialen Teile beweisen (und natürlich die auftretenden Abbildungen definieren).
(2) Die Schnittpaarung ([S] III,2). Lemma 2 eventuell ohne Beweis. Bei Theorem 2 die Definition des Schnittes für den Fall, daß sich $Y_{\mathbf{Q}}$ und $Z_{\mathbf{Q}}$ eigentlich schneiden, mit in die Aussage nehmen, bei dem Beweis die Unabhängigkeit von den Wahlen beim Moving Lemma weglassen (d.h. nur [S]p.60 vortragen); Bemerkungen in 2.3 vielleicht nur mündlich erwähnen, 2.3.4 kann weggelassen werden.
(3) Funktorialität ([S] III,3). In Theorem 3 bei (i) die Definition von f^* angeben für den Fall, daß f flach ist (siehe [GS] 3.6.1); bei (ii) nur die Konstruktion von f_* angeben (beachte, daß die Voraussetzung "f eigentlich" in (ii) überflüssig ist, da X und Y ja projektiv sind); (iii) und (iv) ohne Beweis.
(4) Beispiele ([S] III,4) in aller Ausführlichkeit, besonders 4.3
(5) Arakelov-Varietäten ([S] III,5). Je nach Zeit Prop. 2 (i) und (ii) ohne oder mit Beweis, (iii) ohne Beweis; bei 5.2 die Definition von $CH^1(\bar{X})$ mit der Gruppe der Arakelov-Divisor-Klassen (siehe z.B. [Chi]§1) vergleichen; 5.3 weglassen.
(6) Höhen für projektive Varietäten ([S] III,6), Definition der Höhe nach Faltings, Vergleich mit der gewöhnlichen logarithmischen Höhe von rationalen Punkten im projektiven Raum.

5. Vortrag: Charakteristische Klassen (75 Minuten)

(1) Definition der Grassmannschen $G_{m,n}$ ([EGA I] 9.7, wir halten uns allerdings in den Bezeichnungen an [S] IV,1.1).
(2) Definition der Arakelov-Varietäten $\bar{G}$ und $\bar{P}$ und das "Zerfällungsprinzip" ([S] IV,1.1), Theorem 1 ohne Beweis.
(3) Wiederholung der Begriffe "Zusammenhang", "Krümmung" und "Cauchy-Riemann-Operator" ([S] IV,2.1 und 2.2).
(4) Unitäre und hermitesche holomorphe Zusammenhänge ([S] IV, 2.3 und 2.4), Lemma 1 ohne Beweis.
(5) Chern-Formen ([S] IV,2.5).
(6) Arithmetische Chern-Charaktere ([S] IV,4.1 – 4.5), für Theorem 3 die Definition der Abbildungen ω und a ([S] III, Theorem 1) wiederholen, möglichst viel beweisen, auf jeden Fall aber die Konstruktion (Formel (16)) angeben (insbesondere also auch die Abbildung $f\colon X \to G$).

6. Vortrag: Höhen (60 Minuten)

Notation: Es bezeichne K einen Zahlkörper, O_K seinen Ring der ganzen Zahlen, $\eta \in S = \mathrm{Spec}(O_K)$ den generischen Punkt. Weiter sei X eine arithmetische Varietät über O_K (d.h. ein integres reguläres Schema, projektiv und flach über O_K, dessen generische Faser X_η glatt über K ist.

(1) Definition der Höhe eines Zykels bezüglich eines hermiteschen Linienbündels $\bar{L}$ und Beispiele ([BGS] 3.1.1, 3.1.2.1, 3.1.2.2 der Spezialfall für einen 0-dimensionalen Zykel).
(2) Erste Eigenschaften der Höhe ([BGS] Prop. 3.2.1, Prop. 3.2.2(i) für φ konstant, je nach Zeit auch Prop. 3.2.2(ii)). Alles ohne Beweis.
(3) Die Invarianten $e_{\bar{L}}(Y)$ und $m_{\bar{L}}(Y)$ ([Ab] §2): Prop. 2.2 ohne Beweis, bei Theorem 2.4 auf jeden Fall die Ungleichung $h \leq e$ beweisen (modulo des arithmetischen Hilbert-Samuel Theorems), Theorem 2.7 ohne Beweis, Korollar 2.8
(4) Gleich verteilte Folgen ([Ab] §Prop. 2.9).

7. Vortrag: Höhen für Untervarietäten von abelschen Varietäten, Formulierung der Bogolomov-Vermutung (60 Minuten)

Notation: Ab jetzt bezeichne A eine abelsche Varietät über dem Zahlkörper K.

(1) Definition der Néron-Tate-Höhe auf $A(\bar{K})$ ([Si] 4.3).
(2) Formulierung der Vermutung von Bogolomov ([Ab] §1).
(3) Definition der normalisierten Höhe für eine beliebige Untervarietät und für ample symmetrische Linienbündel ([Ab] 3.1 und 3.2), Beweis der Existenz des Limes, Unabhängigkeit von den Wahlen ohne Beweis.

(4) Definition der Invariante $\hat{e}_L(Y)$ und Vergleich mit der normalisierten Höhe ([Ab] 3.3, 3.4, 3.5), Theorem 3.3 beweisen, Theorem 3.4 ohne Beweis, Umformulierung der Bogolomov-Vermutung (nach Theorem 3.4), von Prop. 3.5 möglichst viel beweisen.

8. Vortrag: Beweis der Bogolomov-Vermutung (60 Minuten)
Beweis der Bogolomov-Vermutung ([Ab] §4).
Je nach Vorliebe kann der Vortragende auch noch ein wenig auf [Ab] §5 eingehen.

Bibliographie

[Ab] Abbes, A.: Hauteurs et discrétude, *Séminaire Bourbaki* **825**, 1996/97 (falls dies noch nicht verfügbar ist, schicke ich auf Anfrage gerne den entsprechenden TeX-file).

[BGS] Bost, J.-B.; Gillet, H.; Soulé, C.: Heights of projective varieties and positive Green forms, J. Amer. Math. Soc. 7 (1994), no. 4, 903–1027.

[Bo] Bost, J.-B.: Théorie de l'intersection et théorème de Riemann-Roch arithmétiques. (French) [Arithmetic intersection theory and the arithmetic Riemann-Roch theorem] Séminaire Bourbaki, Vol. 1990/91. Astérisque No. 201-203 (1991), Exp. No. 731, 43–88 (1992).

[Chi] Chinburg, T.: An Introduction to Aarakelov Intersection Theory, in Arithmetic Geometry (ed. by G. Cornell, J.H. Silverman), Springer 1986

[EGA1] Grothendieck, A; Dieudonné, J.A.: Eléments de Géométrie Algébrique I, Springer Verlag 1971

[Fu] W. Fulton: *Intersection Theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3. Folge), Vol. 2, 2nd edition, Springer 1997

[GS] Gillet, H.; Soulé, C.: Arithmetic intersection theory. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 72 (1990), 93–174 (1991).

[S] Soulé, C.: Lectures on Arakelov geometry. With the collaboration of D. Abramovich, J.-F. Burnol and J. Kramer. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 33. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[Si] Silverman, J.H.: The Theory of Height Functions, in Arithmetic Geometry (ed. by G. Cornell, J.H.Silverman), Springer 1986