Koordinatensysteme und Separation des Laplaceoperators

1 Idee des Separationsansatzes

Das Separationsverfahren ermöglicht das Lösen von (partiellen) Differentialgleichungen auf Gebieten des $\mathbf{R}^n$ durch Wahl geigneter Koordinatensysteme und Umwandeln der DGL in mehrere voneinander unabhängige DGL's auf Gebieten niedriger Dimension (vor allem n DGL's in $\mathbf{R}$)

Schema[1]: Sei $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ein Gebiet, $f : \Omega \to \mathbf{R}$ eine Funktion aus einem Hilbertraum $\mathcal{F}(\Omega) \subset \mathrm{Abb}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$, A ein Operator auf $D \subset \mathcal{F}(\Omega)$. Gesucht ist die Lösung $u : \Omega \to \mathbf{R}, \quad u \in D$ der Gleichung $Au = f$ mit zusätzlichen Randbedingungen (z. B. $u_{|\partial\Omega} = 0$). Hat man nun in $\mathcal{F}(\Omega)$ ein vollständiges Orthonormalsystem $h_\alpha, \ \alpha \in I$ von Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten λ_α, so kann man u darstellen durch

$$u = \sum_\alpha a_\alpha h_\alpha \quad \text{mit} \quad a_\alpha = \frac{\langle f, h_\alpha \rangle_{\mathcal{F}}}{\lambda_\alpha}$$

wie man durch Koeffizientenvergleich von $Au = \sum_\alpha A(a_\alpha h_\alpha) = \sum_\alpha \lambda_\alpha a_\alpha h_\alpha = \sum_\alpha \langle f, h_\alpha \rangle_{\mathcal{F}} h_\alpha = f$ sieht.

Die Schwierigkeit besteht also darin, ein geeignetes ON-System von Eigenvektoren zu bestimmen. Hier hilft oft der *Separationsansatz.* Nach Wahl geeigneter Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$, macht man die Annahme, daß sich jede Eigenfunktion h separieren läßt, d. h. es gibt Funktionen

$$F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, \quad \text{und} \quad h_1, \ldots, h_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R},$$

$$\text{mit} \quad h(x_1 \ldots, x_n) = F(h_1(x_1), \ldots, h_n(x_n))$$

Meistens wird F so gewählt, daß $\quad h(x_1 \ldots, x_n) = h_1(x_1) + \cdots + h_n(x_n) \quad$ bzw. $h(x_1 \ldots, x_n) = h_1(x_1)h_2(x_2) \cdots h_n(x_n) \quad$ ist. Nun hofft man, daß der Ansatz $AF(h_1(x_1), \ldots, h_n(x_n)) = \lambda F(h_1(x_1), \ldots, h_n(x_n)) \quad$ zu einfacheren (vielleicht nur gewöhnlichen) Differentialgleichungen führt.

Leider führt der Separationsansatz nicht immer zum Ergebnis. Er funktioniert dann, wenn das Gebiet und der Operator gewisse Symmetrieeigenschaften besitzen. Mehr dazu steht in dem Buch von Miller [2], der die Separation verschiedener Operatoren (Helmholtz-, Schrödinger-, Wärmeleitungs-, Laplaceoperator etc.) im Zusammenhang mit dazugehörigen Symmetriegruppen untersucht.[2]

[1] heuristische Vorgehensweise, ohne auf Konvergenz, Vertauschbarkeit von Grenzprozessen etc. zu achten

[2] Ob es jedoch weitergehende Ergebnisse dazu gibt, wann ein Separationsansatz im allgemeinen funktioniert und wie dieser auszusehen hat, ist mir nicht bekannt.

2 Separation des Laplaceoperators

In diesem Abschnitt wird das Separationsverfahren für den Laplaceoperator $-\Delta$ mit der Dirichlet-Randbedingung auf einem Quader im $\mathbf{R}^n$ sowie der Kreisscheibe im $\mathbf{R}^2$ durchgeführt, im nächsten werden die so erhaltenen Ergebnisse bewiesen.

2.1 Dirichlet-Problem auf dem Quader

Sei $Q = \{x \in \mathbf{R}^n | \ 0 < x_i < \pi, i = 1 \ldots n\}$ ein Quader in $\mathbf{R}^n$, $(x_1, \ldots, x_n)$ die kartesischen Koordinaten, $f \in L_2(Q)$. Sei $h \in C^2(Q) \cap L_2(Q)$ eine Eigenfunktion zu einem Eigenwert λ d.h. $-\Delta h = \lambda h$. Aus dem Ansatz

$$h(x_1, \ldots, x_n) = h_1(x_1)h_2(x_2)\ldots h_n(x_n) \tag{1}$$

folgt durch Anwenden des Laplaceoperators

$$\begin{aligned} h_1''(x_1)h_2(x_2)\ldots h_n(x_n) + \ldots + h_1(x_1)h_2(x_2)\ldots h_n''(x_n) = \\ -\lambda h_1(x_1)h_2(x_2)\ldots h_n(x_n) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{h_1''(x_1)}{h_1(x_1)} + \ldots + \frac{h_n''(x_n)}{h_n(x_n)} = -\lambda \tag{2}$$

Durch Ableiten der Gleichung (2) nach x_i sieht man, daß $\frac{h_i''}{h_i}$ konstant ist:

$$h_1''(x_1) = -\lambda_1 h_1 x_1 \ldots h_n''(x_n) = -\lambda_n h_n x_n \qquad \text{mit} \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \lambda \tag{3}$$

Wir erhalten also n gewöhnliche DGL. Weil $u = \sum_\alpha a_\alpha h_\alpha$ am Rand von Q verschwindet, muß $h_i(0) = h_i(\pi) = 0$ sein. So ergibt sich als Lösung

$$h_i(x) = \sin(\alpha_i x), \quad \alpha_i^2 = \lambda_i \quad \alpha_i \in \mathbf{N} \tag{4}$$

Sei $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, bezeichne h mit h_α, dann ist

$$h_\alpha(x_1, \ldots x_n) = \prod_{i=1}^{n} \sin(\alpha_i x_i) \qquad \text{und} \qquad -\Delta h_\alpha = |\alpha|^2 h_\alpha, \qquad \alpha \in \mathbf{N}^n \tag{5}$$

Die h_α bilden in $L_2(Q)$ nach Normierung mit $\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}}$ ein vollständiges ON-System, durch Koeffizientenvergleich folgt schließlich

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n} \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \frac{\int_Q f(x_1, \ldots, x_n) \prod_{i=1}^{n} \sin(\alpha_i x_i) \mathrm{d}x}{|\alpha|^2} \prod_{i=1}^{n} \sin(\alpha_i x_i) \tag{6}$$

2.2 Dirichlet-Problem auf der Kreisscheibe

Sei $K := \{x \in \mathbf{R}^2 \mid ||x|| < 1\}$ eine Kreisscheibe in $\mathbf{R}^2$, (r, φ) die Polarkoordinaten, $f \in L_2(K)$. Sei $h \in C^2(K)$ eine Eigenfunktion zum Eigenwert λ, d.h. $-\Delta h = \lambda h$. Mit dem Ansatz

$$h(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi) \tag{7}$$

folgt durch Anwendung des Laplaceoperators in Polarkoordinaten

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right)\Phi(\varphi) + \frac{1}{r^2}R(r)\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = -\lambda R(r)\Phi(\varphi) \tag{8}$$

Wie oben sieht man, daß $\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}$ konstant ist, man erhält wieder eine gewöhnliche DGL $\Phi'' = -\mu\Phi$. Zusätzlich muß $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$ sein, deshalb gilt für die Lösungen dieser DGL

$$\Phi(\varphi) = a\sin(l\varphi) + b\cos(l\varphi) \qquad \text{mit} \qquad \mu = l^2, \qquad l \in \mathbf{N}_0 \tag{9}$$

Der nur von r abhängige Teil von Gleichung (8) ist ebenfalls konstant, $\Rightarrow$

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) - \frac{l^2}{r^2}R(r) = -\lambda R(r) \tag{10}$$

Obige Gleichung ist die Besselsche Differentialgleichung. Da die Lösung des Dirichlet-Problems am Rande verschwindet, muß $R(1) = 0$ sein. Wie wir in den vorherigen Vorträgen gesehen haben, lösen die Besselfunktionen diese Gleichung.

$$R(r) = J_l(\mu_l^k r), \quad \text{mit } \mu_l^k \text{ Nullstelle von } J_l, \quad \lambda = (\mu_l^k)^2, \quad k \in \mathbf{N} \tag{11}$$

Damit hat man ein vollständiges Orthogonalsystem von $L_2(K)$

$$\{J_0(\mu_o^k r), J_l(\mu_l^k r)\cos(l\varphi), J_l(\mu_l^k r)\sin(l\varphi)\}, \quad k, l \in \mathbf{N} \tag{12}$$

das nach geigneter Normierung zu einem ON-System wird. Die Funktionen aus (12) sind zugleich Eigenfunktionen des Laplaceoperators mit den Eigenwerten $(\mu_l^k)^2$. Für die Lösung gilt dann:

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty}\Bigg\{ & \frac{1}{(\mu_0^k)^2}\frac{\langle f(r,\varphi), J_0(\mu_0^k r)\rangle_{L_2}}{||J_0(\mu_0^k)||_{L_2}} J_0(\mu_0^k r) + \\ \sum_{l=1}^{\infty}\Big[& \frac{1}{(\mu_l^k)^2}\frac{\langle f(r,\varphi), J_l(\mu_l^k r)\cos(l\varphi)\rangle_{L_2}}{||J_l(\mu_0^k)\cos(l\varphi)||_{L_2}} J_l(\mu_0^k r)\cos(l\varphi) + \\ & \frac{\langle f(r,\varphi), J_l(\mu_l^k r)\sin(l\varphi)\rangle_{L_2}}{||J_l(\mu_0^k)\sin(l\varphi)||_{L_2}} J_l(\mu_0^k r)\sin(l\varphi)\Big]\Bigg\} \end{aligned} \tag{13}$$

3 Sätze und Beweise

3.1 Quader

Satz 1 *Die Funktionen* $\left\{ h_\alpha = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^n \sin(\alpha_i x_i) \mid \alpha \in \mathbf{N}^n \right\}$ *bilden in* $L_2(Q)$ *ein vollständiges orthonormiertes System von Eigenvektoren des Laplaceoperators* $-\Delta$ *mit den Eigenwerten* $|\alpha|^2$*.*

Beweis Daß die Funktionen Eigenvektoren sind, läßt sich einfach nachrechnen.

Wir setzen jedes $f \in l_2(Q)$ auf den offenen Würfel $\tilde{Q}$ der Kantenlänge 2π fort durch $\tilde{f}(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) := -f((x_1, \ldots, \pi - x_i, \ldots, x_n))$ für $x_i > \pi$ fort. $\tilde{f} \in L_2(\tilde{Q})$, also können wir die Funktion in einer Fourierreihe entwickeln, die nur Sinusanteile enthält, da $\tilde{f}$ in jeder Variable eine ungerade Funktion ist. Einschränkung auf Q liefert (nach geigneter Normierung) die gewünschte Darstellung.

Lemma 2 *Sei* $f \in C^\infty(Q)$*. Dann konvergiert die Reihe ihrer Fourierkoeffizienten absolut:* $\sum_{k \in \mathbf{Z}^n} |\hat{f}(k)| < \infty$ *mit* $\hat{f}(k) := \frac{1}{2\pi}^n \int_Q f(x) e^{-ikx}\, dx$*.*

Beweis siehe Tafel oder Taylor [3], Seite 183.

Satz 3 *Sei* $f \in C_0^\infty(Q)$ *mit* $f = \sum_\alpha \langle f, h_\alpha \rangle_{L_2} h_\alpha$*. Dann ist*

$$u := \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n} \frac{\langle f, h_\alpha \rangle_{L_2}}{|\alpha|^2} h_\alpha$$

Lösung des Dirichlet-Problems $\quad -\Delta u = f \quad$ *mit* $\quad u|_{\partial Q} = 0.$

Beweis Die Fortsetzung $\tilde{f}$ von f ist ebenfalls C_0^∞, d.h. ihre Fourierkoeffizienten und somit auch die Koeffizienten von f konvergieren absolut, folglich konvergiert die Reihe von f normal. Wegen $|\alpha|^2 \geq 1$ konvergiert auch die Reihe von u normal und insbesondere gleichmäßig auf Q. Wegen $f \in C_0^\infty$ verschwindet u auch auf dem Rand.

3.2 Kreisscheibe

Satz 4 *Das System (12) ist ein vollständiges orthogonales System in* $L_2(K)$ *von Eigenvektoren des Laplaceoperators* $-\Delta$ *zu den Eigenwerten* μ_l^k*.*

Satz 5 *Sei* $f \in C_\infty^0(K)$*. Dann ist die in (13) definierte Funktion* u *Lösung des Dirichlet-Problems.*

4 Sonstiges

4.1 Weitere Gebiete

Der Separationsansatz funktioniert auch für Kreisringe und Kreissektoren sowie für Kugeln im $\mathbf{R}^n$. Bei der Kugel sind die Kugelflächenfunktionen die Eigenvektoren.

4.2 Neumann-Problem

Beim Neumann-Problem muß die Normalenableitung am Rand verschwinden. Führt man den Separationsansatz für den Quader wie oben durch, so hat man die DGL's $h_i'' = -\lambda h_i$ mit den Anfangsbedingungen $h_i' = 0$, und man erhält als Lösung $h_i(x) = \cos(kx)$, bzw. das Orthogonalsystem von Eigenvektoren $h_\alpha(x) = \prod_{i=1}^n \cos(\alpha_i x_i)$ und $h_0 = 1$

4.3 Verallgemeinerung auf L_2

Betrachtet man die Friedrichsche Erweiterung des Laplaceoperators auf ganz L_2, dann erhält man analoge Aussagen für $f \in L_2$. Der Beweis dieser Aussagen benötigt funktionalanalytische Methoden. Mehr dazu siehe Triebel [1].

Literatur

[1] TRIEBEL, H *Höhere Analysis.* Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main, 1980

[2] MILLER, W. *Symmetry and Separation of Variables.* Addison Wesley, Reading, Massachusetts,1977

[3] TAYLOR, M. E. *Partial Differential Equations.* Springer, New York, 1996

....

PDGL's und spezielle Funktionen GUNTHER KRAUSS 29. 11. 1999