Der Laplace-Operator auf $\mathbb{R}^n$

U. Langenfeld

25.Oktober 1999

1 Wichtige Sätze zur Faltung und Fouriertransformation von Distributionen

1.1 Definition

Faltung:

$$(f * g)(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \left(\int_{\mathbb{R}} f(y) g(x-y)\, dy \right)\, dx \tag{1}$$

1.2 Satz

Es seien $T, S \in D'(\mathbb{R}^n)$, und es existiere $T * S$ Dann ist

$$(T * S) \in D'(\mathbb{R}^n), \tag{2}$$

und es gilt weiter:

$$D^\alpha (T * S) = (D^\alpha T) * S = T * D^\alpha \tag{3}$$

Dabei ist α ein Multiindex:

$$\alpha = (\alpha_1 \dots, \alpha_n), \quad \alpha_i \in \mathbb{N}_0, \quad |\alpha| = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i$$

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

1.3 Definition

$S(\mathbb{R}^n)$ besteht aus den komplexwertigen, unendlich oft diff.baren Funktionen $\varphi(x)$, für welche eine Abschätzung

$$\|\varphi\|_{k,l} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (|x|^k + 1) \sum_{|\alpha| \le l} |D^\alpha| \le c_{k,l} \tag{4}$$

gilt.

1.4 Definition und Satz

$$(F\varphi)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-i(x,\xi)\right) \varphi(x) dx \tag{5}$$

$$(F^{-1}\varphi)(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(i(x,\xi)\right) \varphi(\xi) d\xi \tag{6}$$

1.5 Satz

Aus $\varphi(x) \in S(\mathbb{R}^n)$ folgt $(F\varphi)(\xi) \in S(\mathbb{R}^n)$ und es gilt:

$$D^\alpha(F\varphi) = (-i)^{|\alpha|} F(x^\alpha \varphi) \tag{7}$$

$$D^\alpha(F^{-1}\varphi) = (i)^{|\alpha|} F^{-1}(x^\alpha \varphi) \tag{8}$$

1.6 Definition

$S'(\mathbb{R}^n)$ ist die Menge aller komplexwertigen, stetigen Linearformen über $S(\mathbb{R}^n)$

1.7 Definition

Es sei $T \in S'(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $(FT)(\varphi) := T(F\varphi), \qquad \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$.

2 Fundamentallösungen der Laplacegleichung

2.1 Lemma

Es sei $\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha T = U, \quad T, U \in S'(\mathbb{R}^n)$, T besitze stetige partielle Ableitungen (klassisch) bis zur m-ten Ordnung einschließlich. Dann ist T eine klassische Lösung der Partiellen Differentialgleichung. ($a_\alpha(x)$ unendlich oft differenzierbare, komplexwertige Funktion)

2.2 Definition

Eine Distribution $G \in D'(\mathbb{R}^n)$, die $\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha T = \delta$ erfllt, heißt Fundamentallösung.

2.3 Satz

Es sei $\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha T = \delta, \quad a_\alpha \in \mathbb{C}$, es existiere $S * G = T, \quad S \in D'(\mathbb{R}^n)$. Dann ist auch T eine Lösung. Diese ist eindeutig, sofern S aus der Menge der mit G faltbaren Distributionen stammt.

2.4 Satz

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln|x|, & n = 2 \\ -\frac{1}{(n-2)(|\omega_n|)|x|^{n-2}}, & n \geq 3 \end{cases} \tag{9}$$

3 Randwertprobleme der Laplacegleichung

Bemerkung:
Beschränkung auf klassische Lösungen
Ω sei ein zusammenhängendes Gebiet derart, daß auch $\mathbb{R}^n - \Omega, n \geq 3$ ein zusammenhängendes Gebiet ist.

Es gibt vier Randwertprobleme

Inneres Dirichletproblem

Auf $\partial\Omega$ sei eine relle Funktion $\varphi(y)$ vorgegeben, gesucht wird eine auf Ω zweimal stetig differenzierbare und auf $\{\overline{\Omega}$ stetige Funktion u(x), so daß gilt:

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega \tag{10}$$
$$u(y) = \varphi(y), \quad y \in \partial\Omega \tag{11}$$

Äußeres Dirichletproblem

φ wie eben auf $\partial\Omega$ vorgegeben.
Gesucht ist eine auf $\mathbb{R}^n - \overline{\Omega}$ zweimal stetig differenzierbare und auf $\mathbb{R}^n - \Omega$ stetige Funktion u(x) mit

$$\Delta u(x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n - \Omega \tag{12}$$
$$u(y) = \varphi(y), \qquad y \in \partial\Omega \tag{13}$$
$$|u(x)| \to 0 \quad \text{für} \quad |x| \to \infty \tag{14}$$

(Limites längs der Normalenrichtung)

Inneres Neumannproblem

Sei $\varphi(y)$ (reellwertig,stetig) auf $\partial\Omega$ vorgegeben.
Gesucht: Funktion u(x) (reellwertig, stetig) auf Ω mit

$$\lim_{x\to y} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu_y} = \frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y} \quad \text{existiert,} \qquad x \in \Omega, \quad y \in \partial\Omega \tag{15}$$
$$\Delta u(x) = 0, \qquad x \in \Omega \tag{16}$$
$$\frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y} = \varphi(y) \tag{17}$$

Äußeres Neumannproblem

Sei $\varphi(y)$ (reellwertig, stetig) auf $\partial\Omega$ vorgegeben.
Gesucht: Funktion $u(x)$ (reellwertig, stetig) auf $\mathbb{R}^n - \partial\Omega$ vorgegeben mit

$$\lim_{x\to y} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu_y} = \frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y} \quad \text{existiert,} \qquad x \in \mathbb{R}^n - \Omega, \quad y \in \partial\Omega \tag{18}$$
$$\Delta u(x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n - \Omega \tag{19}$$
$$\frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y} = \varphi(y) \qquad y \in \partial\Omega \tag{20}$$
$$|u(x)| \to 0 \quad \text{für} \quad |x| \to \infty \tag{21}$$

3.1 Satz (Maximum - Minimum - Prinzip)

$\Omega \subsetneq \mathbb{R}^n$ sei ein einfach zusammenhängendes und beschränktes Gebiet mit fast überall glattem Rand.

1. $u(x)$ sei eine in Ω harmonische und in $\overline{\Omega}$ stetige Funktion, die ihr Maximum oder Minimum in einem Punkt $x \in \Omega$ annimmt. Dann gilt $u(x) = \text{const}$.

2. Sei $u(x) \neq \text{const}$, in Ω harmonisch, in $\overline{\Omega}$ stetig, so daß für alle $y \in \partial\Omega$

$$\lim_{\Omega \ni x \to y} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu_y} = \frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y} \qquad \text{existiert.} \tag{22}$$

   Dann nimmt $u(x)$ ihr Maximum (Minimum) in einem Randpunkt $y_0 \in \partial\Omega$ an. Dort gilt:

$$\frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y} \lessgtr 0. \tag{23}$$

3.2 Satz

Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^n - \overline{\Omega}$ einfach zusammenhängende Mengen.Dann besitzen das Innere und das Äußere Dirichletproblem sowie das Äußere Neumannproblem höchstenseine Lösung. Notwendig für die Lösbarkeit des Inneren Neumannproblems ist

$$\int_{\partial\Omega} \varphi(y) d\lambda = 0. \tag{24}$$

Existiert eine Lösung $u(x)$, so ist $u(x) + c, c \in \mathbb{C}$ die allgemeine Lösung.
Es sei $\varphi(y) = 0, y \in \partial\Omega$.

4 Der Differentialoperator $A = -\frac{d^2}{dt^2}$ auf (a, b), Randwertprobleme auf (a, b)

4.1 Einiges über Sobolevräume

$$W_2^1((a,b)) = \text{Vervollständigung von} \overline{C^\infty} \text{in der Norm} \tag{25}$$

$$\|x\|^2_{W_2^1} = \int_a^b (|\dot{x}(t)|^2 + |x(t)|^2) dt \tag{26}$$

$$W_2^2((a,b)) = \text{Vervollständigung von} \quad \overline{C^\infty} \text{in der Norm}$$

$$\|x\|^2_{W_2^2} = \int_a^b (|\ddot{x}(t)|^2 + |\dot{x}(t)|^2 + |x(t)|^2) dt \tag{27}$$

$\overline{C^\infty}$ = Menge der komplexwertigen, stetigen, in Ω unendlich oft differnzierbaren Funktionen, die stetige Ableitungen auf $\overline{\Omega}$ haben

4.2 Definition

$$W_D = \{x(t) | x(t) \in W_2^2((0,\pi)), \quad x(a) = x(b) = 0\} \tag{28}$$
$$W_N = \{x(t) | x(t) \in W_2^2((0,\pi)), \quad \dot{x}(a) = \dot{x}(b) = 0\} \tag{29}$$

4.3 Satz

Der Operator A_D, $A_D = -\ddot{x}$, $D(A_D) = W_D$, ist im Hilbertraum $L_2((0,\pi))$ selbstadjungiert und positiv definit.
Die Eigenwerte lauten $\lambda_n = n^2$.Diese sind einfach, die entsprechenden Eigenfunktionen lauten: $x_n(t) = c\sin(nt)$

4.4 Satz:Friedrich-Ungleichung

Es sei $-\infty < a < b < \infty$. Dann gibt es ein $c \in \mathbb{R}^+$, so daß für alle $f \in W_0^1((a,b))$ $\quad \|\dot{x}\| \geq c\|x\|$ gilt.

4.5 Lemma

Es sei $(Ax,x) \geq c\|x\|^2$.Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$, $\quad$ mit$\lambda + c > 0$ Dann gilt:

$$R(\overline{A} + \lambda E) = \overline{R(\overline{A} + \lambda E)} \tag{30}$$

R: Bildbereich

4.6 Lemma

Sei A ein symmetrischer Operator.

1. Gibt es ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $R(A - \lambda E) = R(A - \overline{\lambda}E) = H$, so ist A selbstadjungiert.
2. $H = \overline{R(A + \lambda E)} \oplus N(A^* - \overline{\lambda}E)$

4.7 Satz

Der Operator A_N, $A_N x = -\ddot{x}$, $D(A_N) = W_N$ ist in $L_2((0,\pi))$ selbstadjungiert und halbbeschränkt, hat ein Punktspektrum mit den einfachen Eigenwerten $\lambda_n = n^2$ und den Eigenfunktionen $x_n(t) = c\cos(nt)$.

4.8 Satz

Die Funktionensysteme

$$F_1 = \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nt) \right\}_{n \in \mathbb{N}_0} \tag{31}$$

$$F_2 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \left\{ \quad \frac{2}{\pi} \cos(nt) \right\}_{n \in \mathbb{N}} \right\} \tag{32}$$

sind in $H = L_2((0,\pi))$ Orthonormalbasen und vollständig.
Sei $x(t) \in H = L_2((0,\pi))$. Dann gilt für die Fourierkoeffizienten a_n und b_n:

$$a_n = \int_0^\pi \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nt) x(t) dt = (x_n, x) \tag{33}$$

$$b_n = \int_0^\pi \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(nt) x(t) dt = (x_n, x) \tag{34}$$

$$b_0 = \int_0^\pi \sqrt{\frac{1}{\pi}} x(t) dt = (\frac{1}{\sqrt{\pi}}, x) \tag{35}$$

Die Entwicklung einer Funktion nach diesen Eigenfunktionen lautet also:

$$x(t) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n \sqrt{\frac{2}{\pi}} sin(nt) x(t) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} b_n \sqrt{\frac{2}{\pi}} cos(nt) + \frac{b_0}{\sqrt{\pi}} \tag{36}$$

4.9 Satz

Es sei $x(t) \in L_2((0,\pi))$

1. Das Randwertproblem $-\ddot{y}(t) = x(t), \quad y(0) = y(\pi) = 0,$ besitzt genau eine Lösung aus $W_2^2((0,\pi))$:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nt) \tag{37}$$

2. Das Randwertproblem $-\ddot{y}(t) = x(t), \quad \dot{y}(0) = \dot{y}(\pi) = 0,$ besitzt genau dann eine Lösung aus $W_2^2((0,\pi))$, wenn gilt:

$$\int_0^{\pi} x(t)dt = 0 \tag{38}$$

   Die Lösung lautet dann:

$$y(t) = c + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(nt) \tag{39}$$

4.10 Satz

$$F = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} sin(2nt), \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}} cos(2nt) \right\}_{n \in \mathbb{N}} \right\} \tag{40}$$

ist in $H = L_2((0,\pi))$ vollständig und orthonormiert. Eine Funktion $x(t) \in H = L_2((0,\pi))$ läßt sich wie folgt darstellen:

$$x(t) = \frac{b_0}{\sqrt{\pi}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n} sin(2nt) + b_{2n} cos(2nt)) \tag{41}$$

$a_{2n}, \quad b_{2n}$:Fourierkoeffizienten