Ein Crashkurs zum Spektralsatz

Zum Seminar partielle Differentialgleichungen [1] [2] (WS 1999/2000)

17. Oktober 1999

[1] Fragen an sick@math.uni-bonn.de oder mueller@math.uni-bonn.de

[2] Dieses Skript ist auch auf der Internetseite des Seminars http://styx.math.uni-bonn.de/seminare/ws9900/seminar-ws9900.html zu finden

Vorwort

Dieses Skript ist eine sehr knappe Zusammenfassung der wichtigsten funktional-analytischen Hilfsmittel, die benötigt werden um in der rauhen Welt der partiellen Differentialoperatoren bestehen zu können. Viele Details müssen einfach entfallen aus Mangel an Zeit. Und natürlich kann man nicht auf wenigen Seiten den Stoff eines ganzen Semesters zusammenfassen. Deshalb ist dies hier nur als ein Leitfaden zu verstehen. Die Aufgaben wurden beigelegt zum neugierig machen und zum Selbsttetst wie weit man die Sachen verstanden hat. Natürlich gibt es keine Lösepflicht. Die Lösungen zu den Aufgaben kann man auch in den hinten angegebenen Literaturquellen finden.

So, have fun !

Oliver Sick
Bonn, Oktober 1999

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlegende Definitionen

1.1 Hilberträume

Definition 1.1
Sei H ein reeller Vektorraum von Dimension α (α sei eine beliebige Kardinalzahl) mit den folgenden Eigenschaften:

1. *Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle_H : H \times H \to \mathbb{R}$ eine positive, nichtentartete und symmetrische Bilinearform:*
   - *Für alle $x \in H$ gilt die Ungleichung $\langle x, x \rangle_H \geq 0$;*
   - *Gilt $\langle x, y \rangle_H = 0$ für alle $y \in H$, dann ist $x = 0$;*
   - *Es gilt $\langle x, y \rangle_H = \langle y, x \rangle_H$.*
2. *Cauchyfolgen $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ in H konvergieren eindeutig gegen ein Element (d.h. der Raum ist (folgen-)vollständig) bzgl. der Norm von H;*

Dann ist $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ ein **Hilbertraum**.
Die Norm eines Elements $x \in H$ wird dabei definiert durch

$$\|x\|_H \stackrel{def}{=} \sqrt{\langle x, x \rangle} \tag{1.1}$$

Ein Hilbertraum ist heißt **separabel**, *genau dann wenn er eine abzählbar dichte Menge enthält.*

Man kann die Definition auch erweitern auf Hilberträume über $\mathbb{C}$. Dann fordert man keine Symmetrie, sondern man hat

$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

Die folgenden Aussagen bleiben unverändert, unabhängig davon ob man einen reellen oder eine komplexen Hilbertraum betrachtet.

Bemerkung 1.1 *Im folgenden werden wir immer separable Hilberträume annehmen. Dies macht zum einen deshalb, weil alle uns bekannten Beispiele von Hilberträumen separabel sind und weil man auf diese Weise auch den mengentheoretischen Schwierigkeiten entgehen kann, wenn man die Dimension beschränkt.*

Beispiel 1.1 *Beispiele für Hilberträume*

1. *Jeder endlichdimensional Vektorraum H mit positiver, nichtentarteter, symmetrischer Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ ist ein Hilbertraum. Der Beweis folgt wie bei den Vollständigkeitsbeweisen für den $\mathbb{R}^n$*

2. *Sei $l^2(\mathbb{Z})$ der Raum aller Abbildungen $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ mit*

$$\|\phi\|_{l^2(\mathbb{Z})} \stackrel{def}{=} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\phi(x)|^2 \right)^{1/2} \langle \infty$$

   So ist dieser Raum eine Hilbertraum (Beweise finden sich im Königsberger oder im Triebel)

3. *Der Raum $L^2(\mathbb{R}^n)$ der L^2-Lebesgue messbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bildet noch keinen Hilbertraum bzgl. der Norm*

$$\|f\|_{L^2}^2 \stackrel{def}{=} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 d\mu(x)$$

   Dies ist ein sogenannter **Prähilbertraum***, da hier Cauchyfolgen keinen eindeutig bestimmten Limes besitzen, aber sonst alle anderen Axiome erfüllt sind. Prähilberträumen H läßt sich aber kanonisch ein Hilbertraum $\overline{H}$ zuordnen indem man einfach alle Limites von Cauchyfolgen identifiziert. Man nimmt den Teilraum $N \subset H$ definiert durch*

$$N \stackrel{def}{=} \{x \in H \parallel |x|_H = 0\} .$$

   Dann definiert man

$$\overline{H} = H/N$$

   Dies ist genau das was man macht, wenn man den eigentlichen Hilbertraum $L^2(\mathbb{R}^n)$ konstruiert. N ist dann die Menge der Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die im Lebesgue Sinn **fast überall null** *sind. Man darf sich aber nich an dieser "kleinkrämerischen" Definition von $L^2(\mathbb{R}^n)$ stören und sollte sich am besten nicht etwa Äquivalenzklassen von Funktionen vorstellen, sondern man stellt sich stets einen Repräsentanten der Klasse vor. Dann funktionieren auch viele Argumente der Analysis auch in diesem Kontext auf gewohnte Weise.*

Definition 1.2 *Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ ein Hilbertraum und sei $\{x_i \in H\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge orthonormaler Vektoren, dan heißt diese Menge $\{x_i \in H\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine* **Hilbertraumbasis** *wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:*

1. *Die Menge* $X = \{x_i \in H\}_{i\in\mathbb{N}}$ *ist maximal bzgl. der Orthonormalität, d.h. sei* $\overline{X} = \{\overline{x}_i \in H\}_{i\in\mathbb{N}}$ *orthornormaler Vektoren die X enthält, dann ist* $\overline{X} = X$.
2. *Sei* $x \in H$*, dann gilt*
$$\forall i \in \mathbb{N}: \ \langle x, x_i\rangle_H = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Ist nur die erste Bedingung erfüllt so reden wir von einem **Orthonormalsystem**

Theorem 1.1 *Ist* $X \subset H$ *eine Hilbertraumbasis, dann gelten die beiden folgenden zentralen Gleichungen:*

1. *Für alle* $x \in H$ *gilt*
$$x = \sum_i \langle x, x_i\rangle_H \cdot x_i \qquad \textbf{(Verallgemeinerte Fourierzerlegung)}$$
2. *Für alle* $x \in H$ *gilt*
$$\|x\|^2 = \sum_i |\langle x, x_i\rangle_H|^2 \ \ \textbf{(Parsevalsche Gleichung)}$$
3. *Ist* $\{x_i\}$ *ein Orthonormalsystem, dann gilt*
$$\|x\|^2 \geq \sum_i |\langle x, x_i\rangle_H|^2 \ \ \textbf{(Besselsche Ungleichung)}$$

Beweis: Der Beweis ergibt sich wie im endlich dimensionalen Fall. ✓

Theorem 1.2 $(H\ ,\ \langle,\rangle)$*ist ein separable Hilbertraum genau dann wenn er eine höchstens abzählbare Hilbertraumbasis besitzt.*

Beweis: Folgt ganz simpel mit dem aus der LA bekannten Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren. ✓

Beispiel 1.2 *Man hat eine kanonische Hilbertraumbasis im Raum* $l^2(\mathbb{N})$. *Diese ist gegeben durch*
$$e_i = (0, \cdots, 0, \overset{\text{i-te Stelle}}{1}, 0, \cdots) \quad (i \in \mathbb{N})$$

Beispiel 1.3 *Ein anderes Beispiel für eine Hilbertraumbasis ergibt aus der Fouriertheorie. Sei* $L^2(S^1)$ *der Raum der (komplexen)* L^2*-integrablen Funktionen auf dem Einheitsktreis, dann bilden die Funktionen*
$$e_k(x) = \frac{e^{ik\cdot x}}{\sqrt{2\pi}} \qquad (k \in \mathbb{Z}\ ,\ x \in S^1)$$
eine Hilbertraumbasis des Raums $L^2(S^1)$.

Mit dem Existenzresultat für Hilbertraumbasen erhält man ganz leicht die folgende Aussage

Korollar 1.1 *Sei H ein separabler Hilbertraum, so ist dieser isomorph zu $l^2(\mathbb{Z})$.*

Man nennt dabei zwei Räume isomorph, wenn es eine invertierbare lineare, und stetige Abbildung f gibt , deren Inverses f^{-1} ebenfalls stetig ist (Stetige Abbildungen werden im nächsten Abschnitt erklärt).
Das vorige Korrolar ergibt wiederum

Korollar 1.2 *Seien H_1 und H_2 separable Hilberträume, so sind diese isomorph.*

Es ist noch zu bemerken, daß diese Korollare in keiner Weise mehr stimmen, wenn man unendlichdimensionale Vektorräume mit anderen Topologien betrachtet. Zum Beispiel sei $C_0^\infty(\mathbb{R})$ der Raum der glatten Funktionen mit kompaktem Träger. Wähle als Norm die Supremumsnorm. Dann kann dieser Raum nicht isomorph sein zu irgendeinem Hilbertraum.

Ein weitere wichtiger Begriff ist in der folgenden Definition gegeben.

Definition 1.3 *Sei $L \subset H$ ein Unterraum von H, dann ist*

$$L^\perp \overset{def}{=} \{x \in H \mid \langle x, y\rangle_H = 0 \textit{ für alle } y \in L\} \tag{1.2}$$

das **orthogonale Komplement von** L*.*

Lemma 1.1 *Ist $L \subset H$ abgeschlossen, dann gilt dies auch für $L^\perp$ und wir haben*

$$L \oplus L^\perp = H$$

Beweis: Übung ! ✓

Beispiel 1.4 *Die Abgeschlossenheit von* **L** *ist in der Tat notwendig in diesem Lemma. Ist $L \subset H$ nicht abgeschlossen, dann gibt es $x_i \in L$ mit $\lim_i x_i = x \notin L$.*

Angenommen wir hätten $x \in L^\perp$, so wäre insbesondere

$$0 = \langle x_i, x\rangle_H \to \langle x, x\rangle_H > 0 \Rightarrow \textit{ Widerspruch !!}$$

also gilt dann $L \oplus L^\perp \cap \left(\overline{L} \setminus L\right) = \emptyset$, also $L \oplus L^\perp \neq H$.

1.2 Beschränkte Operatoren

Definition 1.4 *Seien* H_1, H_2 *Hilberträume und sei* $A \in Hom(H_1, H_2)$ *eine lineare Abbildung;*

1. *Dann heißt* **A stetiger Operator**, *falls er stetig ist im Sinne der Hilbertraumtopologie von* H_1 *und* H_2 *respektive (d.h. konvergente Folgen gehen über in konvergente Folgen).*

2. *A heißt* **beschränkt**, *falls es eine Konstante* $c \geq 0$ *gibt, so daß für alle* $x \in H_1$ *die Ungleichung*
$$\|Ax\|_{H_2} \leq c\|x\|_{H_1}$$
erfüllt ist. Die nichtnegative Zahl
$$\|A\| \stackrel{def}{=} \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_{H_2}}{\|x\|_{H_1}}$$
wird dann als die **Operatornorm von A** *bezeichnet. Die Menge der beschränkten Operatoren bezeichnen wir mit* $\mathcal{B}(H_1, H_2)$. *Ist* $H_1 = H_2$, *dann schreiben wir*$\mathcal{B}(H)$.

3. *Der Operator A wird als* **kompakt** *bezeichnet, falls das Bild beschränkter, abgeschlossenen Mengen präkompakt ist. Den Raum der kompakten Operatoren schreiben wir als* $\mathcal{K}(H_1, H_2)$. *Ist* $H_1 = H_2$ *schreiben wir* $\mathcal{K}(H)$.

4. *Sei* $A \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ *dann heißt A* **Operator von endlichem Rang**, *falls*
$$dim_{\mathbb{R}} A(H_1) < \infty \ .$$
Die Zahl $rank(A) \stackrel{def}{=} dim_{\mathbb{R}} A(H_1) \in \mathbb{N}$ *heißt dann* **Rang von A**. *Den Raum der Operatoren von endlichem Rang sei dann* $\mathcal{F}(H)$.

Hier kommen zum ersten Mal Definitionen ins Spiel, die auf den ersten Blick übermäßig kompliziert oder auch unnötig erscheinen. Dem ist aber keineswegs so. Im Fall von endlichdimensionalen Operatoren sind natürlich die Begriffe linear, stetig, beschränkt und sogar kompakt alle zueinender äquivalent. Im unendlichdimensionalen Fall sind dies aber wirklich verschiedene Begriffe. Genauer gilt die Inklusionskette
$$\mathcal{F}(H) \subset_{\neq} \mathcal{K}(H) \subset_{\neq} \mathcal{B}(H) \subset_{\neq} Hom(H, H)$$
In der Tat werden wir sehen, daß die Identität $Id : H \to H$ eine beschränkte aber nicht kompakte Abbildung ist, denn der Einheitsball ist beschränkt, abgeschlossen, aber nicht kompakt (siehe Aufg.1.1). Es gilt aber die folgende Aussage:

Lemma 1.2 *Ein linearer Operator A ist genau dann stetig wenn er beschränkt ist.*

Beweis: Ein beschränkter Operator ist offensichtlich stetig. Denn sei $x_i \to x$. So gilt wegen der Ungleichung

$$\|Ax_i - Ax\|_{H_2} \leq c\|x_i - x\|_{H_1}$$

auch sofort

$$\|Ax_i - Ax\|_{H_2} \to 0$$

das heißt

$$Ax_i \to Ax$$

Die Rückrichtung beweist man am einfachsten durch Widerspruch. Das zu beweisen bleibt dem Leser überlassen. ✓

Bemerkung 1.2 *Der Raum $\mathcal{B}(H_1, H_2)$ ist vollständig bzgl der Operatornorm $\|\cdot\|$. Gleichzeitig kann man auch ncohn Operatoren $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(H)$ als Abbildungen verknüpfen. Vollständige normierte Räume mit "Multiplikation" (und ein paar technischen Extras) nennt man auch* **Banachalgebren**. *Dazu finbdet sich einiges im Buch von Hirzebruch, Scharlau .*

Sei $M \subset \mathcal{B}(H)$ eine Menge von beschränkten Operatoren, dann bezeichnet $M \subset \overline{M} \subset \mathcal{B}(H)$ den Abschluß von M bzgl. der Normtopologie auf $\mathcal{B}(H)$.

Lemma 1.3 *Der Raum $\mathcal{K}(H)$ ist ein abgeschlossener Unterraum in $\mathcal{B}(H)$ und es gilt*

$$\overline{\mathcal{F}(H)} = \mathcal{K}(H) \tag{1.3}$$

Das ist äquivalent zu der Aussage, daß ein beschränkter Operator genau dann kompakt ist, wenn er Limes von Operatoren von endlichem Rang ist.

Beweis: Offensichtlich ist ja jeder Operator von endlichem Rang auch kompakt, d.h. $\overline{\mathcal{F}(H)} \subset \mathcal{K}(H)$. Sei K ein kompakter Operator. Dann gibt es für belibieges $\epsilon > 0$ eine endliche Menge $x_1, \cdots, x_n \in H$, s.d. die folgende Überdeckung gilt:

$$K(\|x\|_H \leq 1\}) \subseteq \bigcup_{i=1,\cdots,n} \{y \in H \mid \|y - x_i\|_H \leq \epsilon\}$$

Angenommen dies wäre nicht der Fall, dann gäbe es also ein $x_1, x_2 \in K(\{\|x\|_H \leq 1\})$ mit $x_2 \notin \{y \in H \mid \|y - x_1\|_H \leq \epsilon\}$. Dann gibt es also auch ein $x_3 \in K(\|x\|_H \leq 1\})$ mit $x_3 \notin \{y \in H \mid \|y - x_1\|_H \leq \epsilon\} \cup \{y \in H \mid \|y - x_2\|_H \leq \epsilon\}$ usw... Man erhielte eine Folge x_i die keine konvergente Teilfolge enthalten würde (denn für alle $i \neq j$ gilt $\|x_i - x_j\|_H > \epsilon$). Dies aber nicht sein, denn der Operator K soll ja gerade beschränkte Folgen in Folgen mit konvergenter Teilfolge abbilden.Widerspruch !
Sei also die $\{x_1, \cdots, x_n\} \subset H$ wie oben und sei $L_\epsilon \subset H$ der von diesen Elementen aufgespannte Unterraum von H. Sei $P_\epsilon : H \to L_\epsilon$ die zugehörige orthogonale Projektion so ist also

$$K_\epsilon \stackrel{def}{=} P \circ K$$

ein Operator von endlichem $Rang \leq n$. Aus der Konstruktion ergibt sich dann (Übung !)

$$\|K - K_\epsilon\| \leq \epsilon$$

Und das Lemma ist bewiesen. ✓

Dieses Lemma sagt, daß kompakte Operatoren eine der einfachsten Klassen von stetigen Operatoren ist, da man stets hoffen kann (z.B. mit Hilfe von Limesargumenten) Sätze aus der endlichdimensionalen Linearen Algebra zu übertragen. Diese Vermutung ist weitgehend richtig und dies ist auch der Grund dafür das man den Spektralsatz am im Fall kompakter Operatoren beweisen kann.

Eng verbunden mit den kompakten Operatoren sind die sogennanten Fredholm Operatoren.

Definition 1.5 *Sei $A : H_1 \to H_2$ ein beschränkter Operator, dann nennen wir A eine* **Fredholm Operator** *wenn die drei folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. $Ker(A)$ *ist endlichdimensional;*
2. $A(H_1) \subseteq H_2$ *ist abgeschlossen;*
3. $Coker(A) \stackrel{def}{=} H_2/A(H_1)$ *ist endlichdimensional*

Die natürliche Zahl

$$Ind(A) \stackrel{def}{=} \dim Ker(A) - \dim Coker(A)$$

heißt **Index** *von A.*
Die Menge der Fredholmopertoren bezeichnen wir mit $Fred(H_1, H_2)$

Lemma 1.4

1. $Fred(H_1, H_2)$ *ist offene Teilmenge von* $\mathcal{B}(H_1, H_2)$*;*
2. *Seien* $U \subset Fred(H_1, H_2)$ *zusammenhängende Teilmenge von* $Fred(H_1, H_2)$ *dann gilt* $Ind(A) = Ind(B)$ *für alle* $A, B \in U$ *(d.h. Der Index ist konstant auf Zusammenhangkomponenten).*

Beweis: Übung ! (Oder man liest den Beweis im Buch von Hirzebruch, Scharlau [3] nach.) ✓

Offentsichtlich gilt für lineare Operatoren $A : H_1 \to H_2$ auf endlichdimesionalen Hilberträumen H_1, H_2 stets $Ind(A) = \dim(H_1) - \dim(H_2)$; ist also insbesondere $H_1 = H_2$, so hat man $Ind(A) = 0$. Außerdem gilt für invertierbare Abbildungen $A : H_1 \to H_2$ auf beliebigen Hilberträumen offensichtlich ebenfalls $Ind(A) = 0$. Eine ähnliche Aussage hat man wenn man die $Id + k$ mit k kompakt betrachtet. Man nennt den Operator k etwas eine **kompakte Pertubation** (oder Störung) der Identität.

Lemma 1.5 *Sei $k : H \to H$ ein kompakter Operator, dann ist gelten für die Operatorfamilie $\{F_t \overset{def}{=} Id - t \cdot k \in \mathcal{B}(H)\}_{t\in\mathbb{R}}$ die folgenden Aussagen:*

1. *Für $t \in \mathbb{R}$ ist F_t ein Fredholm Operator;*
2. *$Ind(F_t) = 0$.*

Beweis: Da die F_t alle in eine Zusammenhangskomponente liegen gilt wegen des vorigen Lemmas $Ind(F_t) = Ind(F_0) = Ind(Id) = 0$ ✓

1.3 Unbeschränkte Operatoren

Definition 1.6
Sei $D \subset H$ ein linearer Unterraum eines Hilbertraums H und sei

$$A : D \to H$$

eine lineare Abbildung, dann nennt man A einen **unbeschränkten Operator** *mit* **Definitiongebiet** *$Dom(A) \overset{def}{=} D$. Man spricht auch von einem* **Operator in H**.

1. *Die Menge*
$$\Gamma_A \overset{def}{=} \{(x, Ax) \subset H \times H \mid x \in H\}$$
ist der **Graph des Operators** *A.*

2. *Seien A, B zwei unbeschränkte Operatoren und es gilt $\Gamma_A \subset \Gamma_B$, dann ist B eine* **Erweiterung von A**. *Dies wird auch geschrieben als $A \leq B$.*

3. *Ist Γ_A ein abgeschlossener Unterraum von $H \times H$ (bzgl. der natürlichen Produktmetrik), dann ist A ein* **abgeschlossener Operator**.

4. *Ist $A \leq B$ und B sei abgeschlossen, dann nennt man A* **abschließbar** *und B nennt man eine* **abgeschlossene Erweiterung** *von A.*

Diese Begriffe der Funktionalanalysis sind wohl recht seltsam, wenn man an den endlichdimensionalen Fall denkt. Dort ist jeder Operator abgeschlossen, da jeder endlichdimensionale Vektorraum abgeschlossen ist. Das gilt eben absolut nicht mehr im unendlichdimensionalen Fall. Z.B. kann man sich leicht überlegen, daß der Unterraum $C^\infty([0, 1]) \subset L^2([0, 1])$ definitiv nicht abgeschlossen ist. Diese ist auch genau der Grund warum man eben die obigen Definitionen einführen muß.
Sei nun A abschließbar durch einen Operator B, dann definieren wir einen Operator $\overline{A}$ durch den Graphen

$$\Gamma_{\overline{A}} \overset{def}{=} \overline{\Gamma_A} \subset H \times H$$

Lemma 1.6 *Sei A abschließbar, dann ist ein $\overline{A}$ abgeschlossener Operator und wir nennen diesen den* **Abschluß** *von A. Für alle abgeschlossenen Erweiterungen $B \geq A$ gilt dann $B \geq \overline{A} \geq A$, $\overline{A}$ ist also die* **minimale abgeschlossene Erweiterung** *von A.*

Beweis: Übung !
(Verwende, daß es bereits eine abgeschlossene Erweiterung B von A gibt). ✓

Diese ganzen Begriffe sind fundamental für alle folgenden Betrachtungen der Spektraltheorie unbeschränkter Operatoren.

1.4 Spektrum und Eigenwerte

Definition 1.7 *Sei $A : H \to H$ entweder ein unbeschränkter Operator mit überall dichten Definitionsgebiet $Dom(A)$ oder ein beschränkter Operator.*

1. *Die Menge*

$$\rho(A) \stackrel{def}{=} \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (A - \lambda I)^{-1} \textit{ existiert und ist beschränkt}\} \tag{1.4}$$

   heißt **Resolventenmenge***.*

2. *Die Abbildung*

$$R : \rho(A) \to \mathcal{B}(H) \tag{1.5}$$

   definiert durch

$$\lambda \stackrel{R}{\mapsto} (A - \lambda I)^{-1} \tag{1.6}$$

   heißt **Resolventenfunktion** *von A.*

3.

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A) \tag{1.7}$$

   ist das **Spektrum von A***.*

4. *Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt* **Eigenwert** *von A falls*

$$Ker(A - \lambda I) \neq \{0\}\ . \tag{1.8}$$

   Für einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ definieren seinen **Eigenraum** *zu λ durch*

$$E_\lambda(A) \stackrel{def}{=} Ker(A - \lambda Id) \tag{1.9}$$

Beispiel 1.5 *Im Gegensatz zum endlichdimensionalen Fall gibt es Operatoren bei denen das Spektrum nicht gleich der Menge der Eigenwerte ist. Betrachtet man z.B. den Operator (den* **Shift Operator***)*

$$s : l^2(\mathbb{N}) \to l^2(\mathbb{N}) \tag{1.10}$$

$$s(x_1, x_2, \cdots) \mapsto (0, x_1, x_2, \cdots) \tag{1.11}$$

Dann ist dieser Operator beschränkt und injektiv, aber nicht surjektiv, also ist s nicht invertierbar. Dies heißt wiederum $\lambda = 0$ liegt im Spektrum, aber $\lambda = 0$ ist offentsichtlich kein Eigenwert !

Lemma 1.7 *Sind $x_1, x_2 \in Dom(A)$ Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1 \neq \lambda_2$ von A, dann ist*

$$< x_1, x_2 >_H = 0$$

Eine schöne Anwendung der Theorie von Fredholmoperatoren ist das folgende Lemma

Lemma 1.8 *Sei k kompakt, dann ist jede Zahl $\lambda \in \sigma(k) \setminus \{0\}$ eine Eigenwert.*

Beweis: Sei $\lambda \in \sigma(k) \setminus \{0\}$. Wir haben nach Lemma1.4, daß $F = \lambda \cdot Id - k$ ein Fredholmoperator mit $Ind(F) = 0$ ist. Da aber F wegen der Wahl von $\lambda \in \sigma(k) \setminus \{0\}$ nicht invertierbar ist, so haben wir entweder $\dim Ker(A) > 0$ oder $\dim CoKer(A) > 0$. Da aber $Ind(F) = 0$ erhalten wir sogar $\dim Ker(F) = \dim CoKer(F) > 0$, also gibt es insbesondere einen echten Eigenvektor zu λ. Damit ist das Lemma bewiesen. ✓

1.5 *Aufgaben*

Im folgenden sei H stets ein separabler Hilbertraum.

Aufgabe 1.1
Zeige, daß der Einheitsball $B_H \overset{def}{=} \{x \in H \mid \|x\|_H \leq 1\}$ *genau dann kompakt ist, wenn H endlichdimensional ist.*

Aufgabe 1.2
(Riesz'scher Darstellungssatz) Sei $\phi : H \to \mathbb{R}$ *ein steiger Operator (man nennt sowas auch ein Funktional), dann gibt es* **genau ein Element** x_ϕ*, so daß*

$$\phi(y) = \langle x_\phi, y \rangle$$

und wir haben

$$\|\phi\| = \|x_\phi\|$$

Dies läßt sich auch so formulieren:
Sei $H' = \mathcal{B}(H, \mathbb{R})$ *der Dualraum von H, dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus* $H' \approx H$.
(Wiederum ist für solch einen Satz im endlichdimensionalen Fall der Beweis offensichtlich. Dies ist im Gegensatz zu unserem Fall, den separablen Hilberträumen.)

Aufgabe 1.3
Zeige, daß die Menge der kompakten Operatoren $\mathcal{K}(H)$ *ein zweiseitiges Ideal der Algebra* $\mathcal{B}(H)$ *ist. Das heißt ist* $K \in \mathcal{K}(H)$ *ein kompakter Operator und ist* $A \in \mathcal{B}(H)$ *beschränkt, dann gilt* $A \circ K \in \mathcal{K}(H)$ *und* $K \circ A \in \mathcal{K}(H)$.

Aufgabe 1.4
Sei $K(x, y)$ *eine komplexwertige Lebesgue meßbare Funktion auf* $[0, 1]^n \times [0, 1]^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ *und sei*

$$\int_{[0,1]^n} \int_{[0,1]^n} |K(x, y)|^2 dx\, dy < \infty \tag{1.12}$$

Zeige: *Der durch die Gleichung*

$$Kf(x) \overset{def}{=} \int_{[0,1]^n} K(x, y) f(y)\, dy \tag{1.13}$$

auf $f \in L^2([0, 1]^n)$ *gegebene Operator ist kompakt.*

Tip:
Der Beweis macht heftig Anwendung von Fubinis Theorem, sowie von dem Konvergenzresultat von Lebesgue und Fatou. Man kann den Beweis für einen etwas allgemeineren Fall auch im Buch von Yosida [4] nachlesen.

Bemerkung:
Operatoren der Form (1.13) nennt man die Funktion $K(x, y)$ auch den **(Operator-)Kern von K**. *Das darf man natürlich nicht mit dem Kern als Nullraum von K verwechseln... Operatoren dieser Form werden* **Integraloperatoren** *genannt. Diese spielen eine große Rolle in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Integraloperatoren die auch noch die Gleichung (1.12) erfüllen sind ein klassisches Beispiel für* **Hilbert-Schmidt Operatoren**.

Aufgabe 1.5 *(Beispiel für einen "seltsamen" Operator) Sei $k : l^2(\mathbb{N}) \to l^2(\mathbb{N})$ der Operator*

$$k(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (0, \frac{1}{1}x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \cdots)$$

Dann ist k kompakt, $\|k\| = 1$, k besitzt keine Eigenwerte und es gilt $\sigma(k) = \{0\}$. Operatoren mit diesen Eigenschaften haben sogar einen Namen und heißen **Volterra Operatoren**.

Kapitel 2

Selbstadjungierte Operatoren

Definition 2.1 *Sei $A : H_1 \to H_2$ ein (beschränkter oder unbeschränkter) Operator.*

1. *Dann nennen wir den durch die Gleichung*

$$\langle Ax, y \rangle_{H_2} = \langle x, A^* y \rangle_{H_1} \quad (x \in Dom(A), y \in H_2) \tag{2.1}$$

definierten Operator $A^* : H_2 \to H_1$ den **adjungierten Operator** *von A.*

2. *Sei $H = H_1 = H_2$ und das Definitionsgebiet $Dom(A)$ sei dicht in H, dann nennt man A* **symmetrisch***, falls*

$$\langle Ax, y \rangle_H = \langle x, Ay \rangle_H \text{ für alle } x, y \in Dom(A) \tag{2.2}$$

3. *Gilt $H_1 = H_2$ und hat man*

$$A = A^*$$

dann nennt man A einen **selbstadjungierten Operator**.

4. *Hat man für einen Operator A die Gleichung*

$$\overline{A} = A^*$$

dann heißt A **wesentlich selbstadjungiert**.

Bemerkung 2.1 *Die Begriffe symmetrisch und selbstadjungiert sind* **nicht identisch!** *Beispiele dazu gibt es in den Aufgaben am Ende des Kapitels.*

Lemma 2.1 *Ist K kompakter Operator, so ist auch K^* kompakt*

Beweis: Da K kompakt ist, so kann man eine approximierende Folge $F_i \to K$ von Operatoren von endlichem Rang finden. Man kann nun leicht zeigen, daß die Folge F_i^* den Operator K^* approximiert. ✓

Wir brauchen auch Kriterien entscheiden zu können, ob ein symmetrischer Operator selbstadjungiert ist:

Lemma 2.2 *Sei A symmetrischer Operator in H.*

1. *Gilt $Dom(A) = H$; dann ist A selbstadjungiert und auch sogar beschränkt.*
2. *A ist selbstadjungiert falls $Im(A \pm i \cdot Id) = H$.*

Beweis: (Übung) ✓

Da wir die Spektraltheorie selbstadjungierter Operatoren untersuchen wollen ist es nötig das Spektrum eines selbstadjungierten Operators genauer zu beschreiben.

Definition 2.2 *Sei $A : H \to H$ selbstadjungiert.*

1. *Dann definieren wir* **das Punktspektrum von A** *durch*

$$\sigma_p(A) \stackrel{def}{=} \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda \text{ ist Eigenwert von } \mathbf{A} \ \} \tag{2.3}$$

2. *Das* **stetige Spektrum von A** *ist definiert durch*

$$\begin{aligned} \sigma_c(A) \stackrel{def}{=} \{\lambda \in \mathbb{C} \quad | \quad & \exists \text{ nicht häufende Menge von Vektoren} \\ & \{x_i \in H\}_{i \geq 0} \text{ mit } |Ax_i - \lambda x_i| \to 0\} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Lemma 2.3 *Sei A selbstadjungiert, dann gilt die Gleichung*

$$\sigma(A) = \sigma_c(A) \cup \sigma_p(A) \subset \mathbb{R} \tag{2.5}$$

Beweis: (Übung) ✓

Lemma 2.4 *Sei K ein kompakter und selbstadjungiert Operator. Dann ist $\sigma \subset [\ -\|K\|, +\|K\|\ ]$ und $m = \|K\|$ oder $m = -\|K\|$ ist Eigenwert von K.*

Beweis: Es gibt eine Folge $\{\phi_i\}_{i \geq 0}$ mit $\|\phi_i\| = 1$ und

$$\lim_i |\langle K\phi_i, \phi_i\rangle_H| = \|K\|$$

o.E. existiert auch $\lim_i \langle K\phi_i, \phi_i\rangle_H = m$ und es gilt $|m| = \|K\|$. Da K kompakt ist gilt ohne Einschränkung (nach Auswahl einer Teilfolge), daß auch $K\phi_i$ konvergiert. Damit hat man dann

$$\begin{aligned} \|K\phi_i - m\phi_i\|_H^2 &= \|K\phi_i\|_H^2 + \|m\phi_i\|_H^2 - 2m\langle K\phi_i, \phi_i\rangle_H \\ &\to 0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Da $K\phi_i$ konvergiert, so konvergiert auch die Folge $m\phi_i$ und damit auch $\phi_i \to \psi \in H$. Aus der vorigen Gleichung erhalten wir also

$$0 = \|K\psi\|_H^2 + \|m\psi\|_H^2 - 2m\langle K\psi, \psi\rangle_H = \|K\psi - m\psi\|_H^2$$

also

$$K\psi = m\psi$$

✓

Definition 2.3 *Ein Operator A in H hat*

- **reines stetiges Spektrum**, *falls $\sigma_p(A) = \emptyset$;*
- **reines Punktspektrum**, *falls*

$$\overline{\bigoplus_{\lambda \in \sigma_p(A)} E_\lambda(A)} = H$$

- **diskretes Spektrum**, *falls $\sigma_c(A) = \emptyset$ und $\dim E_\lambda(A) < \infty$ für alle $\lambda \in \sigma_p(A)$.*

Diskretes Spektrum bedeutet nicht mehr und nicht weniger, daß man das Spektrum als Folge $\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ schreiben kann und man hat $\lim_{i\to\infty} |\lambda_i| = \infty$. Insbesondere können also nur unbeschränkte Operatoren ein diskretem Punktspektrum haben. Dies ist, wie wir sehen werden, ein typisches Verhalten für viele Differentialgleichungsoperatoren. Eines der wichtigsten Kriterien um entscheiden zu können ob ein selbstadjungiuerter Operator diskretes Spektrum hat is der folgende Satz

Theorem 2.1
Sei A selbstadjungierter Operator in H mit Definitionsbereich $Dom(A)$. $Dom(A)$ sei dabei normiert mit der Graphennorm $\|x\|_A^2 = \|x\|_H^2 + \|Ax\|_H^2$. Dann ist das Spektrum von A diskret genau dann wenn ie Einbettungsabbildung

$$i_A : Dom(A) \to H \tag{2.7}$$

kompakt ist.

Beweis:
✓

2.1 *Aufgaben*

Aufgabe 2.1 *Sei A selbstadjungierter Operator. Dann hat A diskretes Spektrum genau dann wenn für ein λ aus der Resolventenmenge der Operator $R_A(\lambda) = (A - \lambda Id)^{-1}$ kompakt ist.*

Aufgabe 2.2 *Sei $\partial\sigma_p(A) = \overline{\sigma}_p(A) \setminus \sigma_p(A) \subseteq \mathbb{C}$ die Menge der Häufungspunkte des Punktspektrums, so gilt $\partial\sigma_p(A) \subseteq \sigma_c(A)$.*

Aufgabe 2.3 *Sei A ein beschränkter, selbstadjungierte Operator, dann gilt*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x\rangle_H| \tag{2.8}$$

Aufgabe 2.4 *Sei*

$$\mathcal{D} = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f' \in L^2([0,1]) \cap C([0,1]) \textit{ und } f(0) = f(1) = 0 \} \subset L^2([0,1]) \; .$$

Dann ist der in $L^2([0,1])$ definierte unbeschränkte Operator

$$\partial_x \stackrel{def}{=} \frac{1}{i}\frac{d}{dx} \tag{2.9}$$

mit Definitionsbereich $Dom(\partial_x) = \mathcal{D}$ **symmetrisch aber nicht selbstadjungiert***.*
Tip: zeigen sie, daß das Definitionsgebiet von ∂_x^* durch

$$Dom(\partial_x)^* = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f' \in L^2([0,1]) \cap C([0,1]) \}$$

gegeben ist.

Aufgabe 2.5 *Sei K der kompakte Intergaloperator aus Aufgabe (1.4). Dann ist K selbstadjungiert, wenn für den Kern die Gleichung*

$$K(x,y) = \overline{K(y,x)}$$

gilt.

Kapitel 3

Der Spektralsatz

3.1 Der Spektralsatz für kompakte Operatoren

Den Spezialfall von kompakten Operatoren anzunehmen hat den Vorteil, daß die Formulierung und des Beweis des Spektralsatzes wesentlich einfacher darstellbar sind. Desweiteren gengt dieser Spezialfall auch um viele Resultate des Seminars zu beweisen.

Theorem 3.1 *(***Spektralsatz für kompakte Operatoren***)*
Sei $K \in \mathcal{K}(H)$ ein kompakter, selbstadjungierter Operator. Dann gibt es eine Orthonormalsystem $\{x_i \in H\}_{i\geq 0}$ bestehend aus Eigenvektoren von K, d.h.

$$Ax_i = \lambda_i x_i$$

Desweiteren können sich die Eigenwerte $\{\lambda_i \in \mathbb{R}\}_{i\geq 0}$ höchstens bei $\lambda = 0$ häufen. Insbesondere heißt dies

- $\sigma(A) \subset [-\|K\|, +\|K\|] \subset \mathbb{R}$*;*
- $\sigma_c(A) = \{0\}$*;*
- $\sigma_p(A)$ *ist höchstens abzählbar;*
- *die Eigenwerte $\lambda \in \sigma_p(A)$ häufen sich höchstens bei $\lambda = 0$. Insbesondere ist die Vielfachheit m_i jedes Eigenwerts $\lambda \neq 0$ endlich.*

Zusammenfassend heißt dies , daß K darstellbar ist als eine Summe von Rang-1 Operatoren:

$$Kx = \sum_i \lambda_i \langle x, x_i \rangle_H \cdot x_i \tag{3.1}$$

Beweis: Nach Lemma (2.4) existiert ein Eigenvektor x_1 zu einem Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $|\lambda| = \|K\|$. Sei $H = Span\langle x_1 \rangle \oplus R_1$. Dann ist die Restriktion von K auf der Unterraum R_1 wieder ein kompakter uns selbstadjungierter Operator K_1 mit $\|K_1\| \leq \|K\|$. Damit hat K_1 wieder einen Eigenvektor. Wir konstruieren nun induktiv auf diese Weise

1. eine Folge $\{R_i\}_i \subset H$ von Unterräumen
2. eine Folge $\{K_i : R_i \to R_i\}_i$ von kompakten Operatoren
3. eine Folge von Eigenwerten $\lambda_i \in [-\|K\|, \|K\|]$
4. eine Folge von Eigenvektoren $\{x_i\}_i$.

Sei $H_\infty = Span\langle x_1, x_2, \cdots \rangle \subseteq H$ und $R_\infty = \cap_i R_i$. Dann erhält man eine orthogonale Zerlegung der Form

$$H = H_\infty \oplus R_\infty$$

Sei nun $\{y_j \in R_\infty\}_j$ eine Hilbertbasis von R_∞, und sei $x = \sum_i \langle x, x_i \rangle x_i + \sum_j \langle x, y_i \rangle y_j$ die verallgemeinerten Fourierzerlegung dann erhalten wir die Gleichung

$$\begin{aligned} Kx &= \sum_i \langle x, x_i \rangle_H K x_i + \sum_j \langle x, y_i \rangle_H K y_j \\ &= \sum_i \langle x, x_i \rangle_H \lambda_i x_i + \sum_j \langle x, y_i \rangle_H K y_i \end{aligned} \tag{3.2}$$

Um also die Darstellung (3.1) zu beweisen, genügt es $Ky_j = 0$ d.h. $0 \equiv K_\infty : R_\infty \to R_\infty$ zu zeigen. K_∞ ist dabei die Einschränkung von K auf R_∞. Das Verschwinden von K_∞ folgt aber aus der Gleichung $\|K_\infty\| \leq \|K_i\| = |\lambda_i|$ wenn wir zeigen können, daß $\lambda_i \to 0$ gilt . Es genügt also $\lambda_i \to 0$ zu zeigen. Würde dies nicht gelten, so gäbe es eine Teilfolge $\lambda_{a(i)}$ von λ_i mit $\lambda_{a(i)} \to \lambda \neq 0$. Da K kompakt ist, müßte dann $Kx_{a(i)} = \lambda_{a(i)} x_{a(i)}$ eine konvergente Teilfolge besitzen. Dies kann aber nicht sein, da der von den x_i aufgespannte Raum $\tilde{H}$ unendlichdimensional ist und K wegne der Bedingung an die λ_i auf $\tilde{H}$ ein invertierbarer Operator ist. Damit haben wir $\lambda_i \to 0$ gezeigt und den Spektralsatz bewiesen. ✓

Bemerkung 3.1 *In der Tat kann der in obigen Beweis konstruierte Raum* $R_\infty = Ker(K)$ *unendlich dimensional sein. Die einfachsten Beispiele hierfür sind beliebige Operatoren von endlichem Rang.*

Definition 3.1 *Die Darstellung (3.1) der Operators* K *nennt man* **Spektralzerlegung von K**.

Eine direkte Anwendung des Spektralsatzes für kompakte Operatoren ist der **Spektralsatz für Operatoren mit diskretem Spektrum**.

Theorem 3.2 *Sei A ein selbstadjungierter Operator in H mit diskretem Spektrum $\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Dann gibt es eine Hilbertraumbasis $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset H$ von Eigenvektoren und wir haben eine Spektraldarstellung von A*

$$Ax = \sum_i \lambda \langle x_i, x\rangle_H \cdot x_i \tag{3.3}$$

Beweis: Dies folgt sofort aus der Spektraldarstellung einer Resolventenfunktion $R_A(\lambda) = (A-\lambda)^{-1}$, denn die Resolvente ist ja kompakt. ✓

3.2 Der Spektralsatz für "allgemeine" Operatoren

Die Spektralzerlegung (3.1) für kompakte Operatoren K kann man auch wie folgt schreiben. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, und sei E_λ der Unterraum aufgespannt von allen Eigenvektoren x_i mit Eigenwert $-\infty < \lambda_i \le \lambda$, Sei $P_\lambda : H \to E_\lambda$ die zugehörige Familie orthogonale Projektionen, dann kann die Spektralzerlegung auch wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} Kx &= \sum_i \lambda_i \langle x_i, x\rangle_H x_i \qquad (3.4)\\ &= \sum_i \lambda_i \langle x_i, x\rangle_H (P_{\lambda_i} x - \lim_{\lambda \to_+ \lambda_i\,,\, \lambda < \lambda_i} P_\lambda x) \\ \text{(formal !)} &= \int_{\mathbb{R}} \lambda \ \ d\langle P_\lambda x, x\rangle_H \end{aligned}$$

wobei für festes $x \in H$ die Funktion $\lambda \mapsto \langle P_\lambda x, x\rangle_H \in [0,1]$ monoton steigend ist und daher ist das letzte Integral als Riemann-Stiltjes Integral auch wohldefiniert. Wenn der Begriff der Riemann-Stiltjes Integrale als Verallgemeinerung des Riemman-Integrals nicht bekannt ist, dann muss man am besten im Buch von Triebel einmal nachlesen; (Zeitmangel, Sorry :-(( )
Die letzte Gleichung kann man auch abgekürzt schreiben als

$$K = \int_{\mathbb{R}} \lambda \ \ dP_\lambda \tag{3.5}$$

Solche Darstellungen nennt man ebenfalls **Spektralzerlegung von K**. Der Spektralsatz für beliebige selbstadjungierte Operatoren ist genau diese Darstellung (3.5). Hier endet aber die Darstellung, da man auf so viele weitere technische Dinge eingehen müßte, daß man am besten doch mal ein richtiges Buch dazu lesen sollte !

3.3 *Aufgaben*

Aufgabe 3.1 *Sei K ein selbstadjungierter Integraloperator (siehe Aufg(1.4)) mit*

$$\|K(x,y)\|_{L^2([0,1]^n\times[0,1]^n)} < \infty\ .$$

Sei $\{\lambda_i\}_i$ *die Menge der von Null verschiedenen Eigenwerte von* K*. Dann gilt die Gleichung*

$$\|K(x,y)\|^2_{L^2([0,1]^n\times[0,1]^n)} = \sum_i \lambda_i^2 \tag{3.6}$$

Insbesondere konvergiert die Summe $\sum_i \lambda_i^2$

Tip: Stelle den Operator in seiner Spektraldarstellung dar.

Kapitel 4

Anwendungen

Tja, Anwendungen werden ja wohl hoffentlich durch uns Seminar in ausreichender Menge gegeben.

Literaturverzeichnis

[1] **Taylor M.**
Partial Differential Equations I, Basic theory
Springer Verlag, 1996

[2] **Triebel**
Höhere Analysis
Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1972

[3] **Hirzebruch F. und Scharlau W.**
Einführung in die Funktionalanalysis
B.I. Hochschultaschenbücher, Band 296, 1971

[4] **Yosida K.**
Functional Analysis
Springer Verlag, 1980

[5] **Rudin W.**
Functional Analysis
Tata McGraw Hill Publishing, 1974