Dirichlet und Neumann Randwertprobleme

Uwe Fermum

05.06.03

Seminar Riemannsche Geometrie und Spektraltheorie - Prof. W. Müller
Universität Bonn - Mathematisches Institut
Sommersemester 2003

Inhaltsverzeichnis

1 Motivation

Ziel ist es Operatorgleichungen der Form Au=f mit bestimmten Randwertbedingungen für partielle Differentialoperatoren zu lösen. Für Operatoren mit reinem Punktspektrum werden wir den Spektralsatz anwenden, um explizite Formeln für die Lösung zu erhalten. Die Lösung wird dann die Form einer unendlichen Reihe von Eigenfunktionen haben, die die Randwertbedingungen erfüllen. Es ist klar, daß wir nur eine explizite Lösung erwarten können, falls wir die Eigenfunktionen explizit berechnen können. Dies ist im Allgemeinen nicht möglich, jedoch für spezielle Operatoren und spezielle Gebiete können wir dieses Ziel erreichen.

2 Elliptische Differentialoperatoren

Sei $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ offen, beschränkt.

(2.1) Definition: Ein partieller Differentialoperator zweiter Ordnung der Form - $\sum_{|\alpha|\leq 2} a_\alpha(x) D^\alpha$ heißt (gleichmäßig) elliptisch, falls es ein $c_0 > 0$ gibt mit

$$\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x)\xi^\alpha \ \geq c_0|\xi|^2 \quad \forall x \in \Omega,\ \forall \xi \in \mathbf{R}^n.$$

Wir betrachten nun Operatoren der Form - $\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j) + c(x)$.

Sind die Koeffizienten $a_{ij} \in C^1(\Omega)$ so können wir ausdifferenzieren und erhalten die Elliptizitätsbedingung ebenfalls durch

$$\sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ \geq c_0|\xi|^2 \quad \forall x \in \Omega,\ \forall \xi \in \mathbf{R}^n.$$

(2.2) Proposition: Seien $(a_{ij}) \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbf{R}^{n\times n})$ symmetrisch, elliptisch und $c \in C^\infty(\overline{\Omega})$ mit $c \geq 0$. Dann ist der Operator A gegeben durch

$$Au(x) \ = \ -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u(x)) \ + \ c(x)u(x) \tag{1}$$

$$dom(A) \ = \ C_0^\infty(\Omega) \tag{2}$$

positiv definit, symmetrisch und mit dichtem Definitionsbereich $C_0^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega)$.

(2.3) Bemerkung: Also ist $\Delta : C_0^\infty(\Omega) \ \rightarrow \ C_0^\infty(\Omega)$ positiv definit, symmetrisch.

(2.4) Satz: Sei $A:\ dom(A) \ \rightarrow \ H$, symmetrisch und mit Eigenwerten (λ_j) die sich nur im Unendlichen häufen:

$$0 \leq |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \ ... \ |\lambda_j| \ \rightarrow \ \infty, \quad j \rightarrow \infty$$

und dazugehörigen Eigenfunktionen $(v_j)_{j\in\mathbf{N}}$.
Ist das System $(v_j)_{j\in\mathbf{N}}$ vollständig, so ist A wesentlich selbstadjungiert und $\overline{A}:\ dom(\overline{A}) \rightarrow H$ hat reines Punktspektrum $\sigma(\overline{A}) = (\lambda_j)_{j\in\mathbf{N}}$.

(2.5) Definition: Sei A ein elliptischer Differentialoperator. Sei $f \in L^2(\Omega)$.
Dirichlet-Problem: Betrachte den Operator

$$A_D := A|_{dom(A_D)} \tag{3}$$
$$dom(A_D) := \{u \in C^\infty(\overline{\Omega}), u|_{\partial\Omega} = 0\} \tag{4}$$

Gesucht ist eine Lösung $u \in dom(A_D)$ mit $A_D u = f$.
D.h. also eine Lösung der Gleichungen

$$Au = f \quad in \quad \Omega \tag{5}$$
$$u = 0 \quad auf \quad \partial\Omega. \tag{6}$$

Neumann-Problem: Betrachte den Operator

$$A_N := A|_{dom(A_N)} \tag{7}$$
$$dom(A_N) := \{u \in C^\infty(\overline{\Omega}), \frac{\partial u}{\partial n} |_{\partial\Omega} = 0\} \tag{8}$$

Gesucht ist eine Lösung $u \in dom(A_N)$ mit $A_N u = f$
D.h. also eine Lösung der Gleichungen

$$Au = f \quad in \quad \Omega \tag{9}$$
$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad auf \quad \partial\Omega. \tag{10}$$

Hierbei bezeichnet $\frac{\partial u}{\partial n}$ die Ableitung in Richtung der äußeren Normalen.

(2.6) Proposition: Sei A: dom(A) $\to$ H dicht definiert, positiv definit, symmetrisch und mit reinem Punktspektrum. Sei $f \in L^2(\Omega)$. Sei $(v_j)_{j\in\mathbf{N}}$ ein vollständiges orthonormiertes System von Eigenfunktionen zu den Eigenwerten

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \ldots \lambda_j \;\to\; \infty, \quad j \to \infty$$

So besitzt $\overline{A}u = f$ genau eine Lösung $u \in dom(\overline{A})$ gegeben durch

$$u(x) \;=\; \sum_{j\in\mathbf{N}} \frac{1}{\lambda_j} < f, v_j > v_j(x)$$

(2.7) Bemerkung: Das Problem reduziert sich also auf das Finden eines vollständigen Orthonormalsystems von Eigenfunktionen, d.h. Lösungen der Gleichung

$$Av = \lambda v \quad (Eigenwert - Problem)$$

Für solch eine Lösung gilt stets $u \in C^\infty(\Omega)$ (Elliptische Regularität).

3 Der Laplace-Operator auf dem Quader

$Q \;:=\; \{x \in \mathbf{R}^n,\; 0 < x_i < \pi,\; i = 1..n\}$
Problem: Finden eines vollständigen Systems von Eigenfunktionen $-\Delta v = \lambda v$ mit entsprechenden Randwertbedingungen.
Idee: Nutze die geometrische Gegebenheit aus.
$\longrightarrow$ Seperation von Variablen. Setze $v(x) := v_1(x_1) \cdots v_n(x_n)$

(3.1) Erinnerung: Das System $\{(\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{2}}\sin(kx)\}_{k\in\mathbf{N}}$ ist ein vollständiges Orthonormalsystem von $L^2(0,\pi)$.

(3.2) Satz: Die Funktionen $(v_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{N}^n} = \{(\frac{2}{\pi})^{\frac{n}{2}}\prod_{i=1}^{n}\sin(\alpha_i x_i)\}_{\alpha\in\mathbf{N}^n}$ bilden ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2(Q)$ bestehend aus Eigenfunktionen von Δ, die die Dirichlet-Randwertbedingungen erfüllen.

$$-\Delta v_\alpha = |\alpha|^2 v_\alpha$$

D.h. für $f \in L^2(Q)$ existiert genau eine Lösung $u \in dom(\overline{\Delta_D})$ des Dirichletproblems $-\overline{\Delta_D}u = f$ gegeben durch:

$$u(x) \;=\; \sum_{\alpha\in\mathbf{N}^n} \frac{1}{|\alpha|^2} < f, v_\alpha > v_\alpha(x).$$

(3.3) Bemerkung: Analoge Überlegungen zeigen, daß $(w_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{N}_0^n}$ mit

$$w_\alpha(x) := \prod_{i=1}^{n}\cos(\alpha_i x_i)$$

ein vollständiges Orthogonalsystem in $L^2(Q)$ sind, bestehend aus Eigenfunktionen von Δ.

$$-\Delta w_\alpha = |\alpha|^2 w_\alpha$$

In diesem Fall erfüllen die $(w_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{N}_0^n}$ die Neumann-Randwertbedingungen.
Beachte auch, daß der Eigenwert 0 für $w_0 = 1$ auftritt.

(3.4) Satz: Sei $f \in L^2(Q)$ mit $\int_Q f(x)dx = 0$. Dann besitzt das Neumannproblem $-\overline{\Delta_N}u = f$ genau die folgende Lösungsmenge:

$$u(x) \;=\; \sum_{\alpha\neq 0} \frac{1}{|\alpha|^2\|w_\alpha\|^2} < f, w_\alpha > w_\alpha(x) \;+c \quad \textit{mit } c \in \mathbf{R} \textit{ beliebig}.$$

(3.5) Bemerkung: Die Forderung $< f, w_0 >= 0$ ist tatsächlich notwendig:

$$< f, w_0 > = \int_Q f \;=\; \int_Q \Delta u \;=\; \int_{\partial Q}\frac{\partial u}{\partial n} \;=\; 0.$$

4 Der Laplace-Operator auf der Kugel

$B^n := \{x \in \mathbf{R}^n,\ 0 < |x| < 1\}$
Problem: Finden eines vollständigen Systems von Eigenfunktionen $-\Delta v = \lambda v$.
Betrachte zunaechst nur B^2.
$\longrightarrow$ Seperation von Variablen in Polarkoordinaten:
$x_1 = r\cos(\varphi),\ x_2 = r\sin(\varphi)$
Laplace-Operator in Polarkoordinaten: $-\Delta v = -\frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r v) - \frac{1}{r^2}\partial_\varphi v$.
Der Seperationsansatz $v(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ führt zur Bessel-Differentialgleichung:

$$-R'' - \frac{1}{r}R' + \frac{l^2}{r^2}R = \lambda R$$

(4.1) Definition: Eine Lösung der Bessel-Gleichung ist gegeben durch:

$$\mathcal{J}_l(t) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{(\frac{t}{2})^{l+2j}}{j!\Gamma(l+j+1)},\ t \geq 0$$

Die $\underline{Bessel-Funktion}$ zum Parameter l. Die Reihe konvergiert in jeder kompakten Teilmenge $K \subset (0,\infty)$ gleichmäßig und absolut. $\mathcal{J}_l$ besitzt unendlich viele positive Nullstellen, bezeichnet mit μ_l^k:

$$\mu_l^k \to \infty \quad f\ddot{u}r\ k \to \infty$$

$\mathcal{J}_l'$ besitzt ebenfalls unendlich viele Nullstellen, bezeichnet mit γ_l^k:

$$\gamma_l^k \to \infty \quad f\ddot{u}r\ k \to \infty$$

(4.2) Satz: $\{\mathcal{J}_0(\mu_0^k r),\ \mathcal{J}_l(\mu_l^k r)\cos(l\varphi),\ \mathcal{J}_l(\mu_l^k r)\sin(l\varphi)\}_{k,l\in\mathbf{N}}$ bilden ein vollständiges Orthogonalsystem von $L^2(B^2)$, bestehend aus Eigenfunktionen von Δ, die dieDirichlet-Randwertbedingungen erfüllen. Die Eigenwerte erhalten wir duch: $\{(\mu_l^k)^2\}_{k,l\in\mathbf{N}}$.

(4.3) Satz: $\{\mathcal{J}_0(\gamma_0^k r),\ \mathcal{J}_l(\gamma_l^k r)\cos(l\varphi),\ \mathcal{J}_l(\gamma_l^k r)\sin(l\varphi)\}_{k,l\in\mathbf{N}}$ bilden ein vollständiges Orthogonalsystem von $L^2(B^2)$, bestehend aus Eigenfunktionen von Δ, die die Neumann-Randwertbedingungen erfüllen. Die Eigenwerte erhalten wir duch: $\{(\gamma_l^k)^2\}_{k,l\in\mathbf{N}}$.

(4.4) Korollar: Sei $f \in L^2(B^2)$. Dann koennen wir das Dirichlet-Randwertproblem und das Neumann-Randwertproblem in entsprechender Weise wie in (3.2) und (3.4) lösen.

(4.5) Satz: Sei $\{S_m^l(\varphi)\}_{l\in\mathbf{N}_0}^{\#m}$ ein vollständiges orthogonales System von Kugelflächenfunktionen in $L^2(S^n)$. Setze $\nu := \frac{n}{2} - 1$. So ist

$$\{S_m^l(\varphi) r^{-\nu} \cdot \mathcal{J}_{\nu+l}(\mu_k^{l+\nu} r)\}_{l\in\mathbf{N}_0, k\in\mathbf{N}}^{\#m}$$

ein vollständiges orthogonales System von $L^2(B^n)$ aus Eigenfunktionen von Δ mit Dirichlet-Randwertbedingungen.

5 Die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) \ - \ \Delta u(x,t) \ = \ f(x,t)$$

ist vom hyperbolischen Typus. Wir betrachten das Rand-Anfangswertproblem:

$$\left.\begin{array}{r} \partial_t^2 u - \Delta u = f\ in\ \Omega \\ u = 0\ auf\ \partial\Omega \end{array}\right\} t > 0 \qquad \left.\begin{array}{r} u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\Omega} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \quad x \in \overline{\Omega} \end{array}\right\} t = 0$$

(5.1) Satz: Sei $f \in C^0(\overline{\Omega \times (0,\infty)})$.Seien $u_0, u_1 \in C^0(\overline{\Omega})$ So besitzt das Rand-Anfangswertproblem genau eine Lösung $u \in dom(\overline{\Delta})$. Sei $(v_j)_{j\in\mathbf{N}}$ ein vollständiges Orthonormalsystem von $L^2(\Omega)$.
So hat die Lösung die Form:

$$u(x,t) \;=\; \sum_{j=1}^{\infty}\Big(< u_0, v_j > \cos(\sqrt{\lambda_j}t) + \tfrac{1}{\sqrt{\lambda_j}} < u_1, v_j > \sin(\sqrt{\lambda_j}t) + \\ \tfrac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \int_0^t \sin(\sqrt{\lambda_j}(t-s)) < f(x,s), v_j > ds\Big) \cdot v_j(x).$$

Literatur

[1] *Hans Wilhelm Alt* , Lineare Funktionalanalysis, Springer Verlag, 1992

[2] *Serge Lang* , Real and Functional Analysis, Springer Verlag, 1993

[3] *Michael E. Taylor* , Partial Differential Equations I, Springer Verlag, 1996

[4] *Michael E. Taylor* , Partial Differential Equations II, Springer Verlag, 1996

[5] *Hans Triebel* , Höhere Analysis, Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1972