Spektralzerlegung des Laplace-Operators auf Liegruppen und kompakten symmetrischen Räumen

Anna Engels

Seminar Riemannsche Geometrie und Spektraltheorie SS 2003

Zusammenfassung

Ich will erklären, wie man mit Hilfe der Darstellungstheorie das Spektrum des Laplace-operators (für den Raum der Funktionen) auf einer Liegruppe oder einem symmetrischen Raum (jeweils kompakt) bestimmen kann. Dazu zeigt man, dass der Laplaceoperator (bzgl. einer geeigneten Metrik) mit Darstellungen der Liegruppe vertauscht. Nach dem Schurschen Lemma wirkt er damit auf irreduziblen Darstellungen als Skalar. Die Zerlegung von L^2 aus dem Peter-Weyl-Theorem liefert dann die Spektralzerlegung.

1 Allgemeines Verfahren

Es sind also folgende Probleme zu betrachten:

- Beweis der behaupteten Eigenschaften des Laplace-Operators
- Bestimmung der irreduziblen Darstellungen in der Zerlegung
- Berechnung der Eigenwerte

1.1 Laplace-Operator und Casimir-Operator

Sei G eine kompakte halbeinfache Liegruppe mit Liealgebra $\mathfrak{g}$.
Erinnerung: Killing-Form $B(X,Y) = Tr(ad(X)ad(Y))$ für $X, Y \in \mathfrak{g}$
Da G halbeinfach ist, ist B nicht ausgeartet und sogar negativ definit, da G kompakt ist. $-B$ ist also ein Sakalarprodukt auf $\mathfrak{g} = T_eG$ und induziert damit durch Linkstranslation eine Riemannsche Metrik auf G. Im Folgenden sei G immer mit dieser Metrik versehen.
Mit $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ bezeichnen wir die Komplexifizierung $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$ von $\mathfrak{g}$.

Bemerkung: Umgekehrt gibt es zu einer komplexen halbeinfachen Liealgebra eine kompakte Realform.

Definition: Sei $\{X_i\}$ Basis von $\mathfrak{g}$. Das **Casimir-Element** (als Element von $U(\mathfrak{g})$) ist def. durch

$$\mathcal{C} = \sum_{ij} C_{ij} X_i X_j \quad \text{mit } (C_{ij}) = (B(X_i, X_j))^{-1}$$

Satz: $\mathcal{C}$ ist unabhängig von der Wahl der Basis *(denn beide Terme transformieren sich quadratisch)* und liegt im Zentrum von $U(\mathfrak{g})$.

Da Elemente von $\mathfrak{g}$ (aufgefasst als linksinvariante Vektorfelder) auch (linksinvariante) Differentialoperatoren sind, kann man auch $\mathcal{C}$ als Differentialoperator auffassen. $\mathcal{C}$ heißt dann **Casimir-Operator**.

Satz: Sei Δ bzgl. obiger Metrik definiert, dann gilt $\Delta = \mathcal{C}$

Beweis: Da $\mathcal{C}$ unabhängig von der Wahl der Basis ist, können wir oBdA $\{X_i\}_{i=1,\dots,n}$ als Orthonormalrahmen wählen (d.h. in jedem Punkt p bilden die Vektoren $X_i(p)$ eine Orthonormalbasis von T_pG bezüglich des entsprechenden Skalarproduktes), also insbesondere $C_{ij} = -\delta_{ij}$. Die Familie $\{\xi_i\}_{i=1,\dots,n}$ von 1-Formen sei definiert durch $\xi_i(X_j) = \delta_{ij}$ („duale Basis"). Für eine Funktion f gilt $df = \sum_i X_i(f)\xi_i$ (sieht man durch Einsetzen der X_j), und damit

$$
\begin{aligned}
\Delta f &= d^*df = -*d*df = -*d*\sum_i X_i(f)\xi_i = -*d\sum_i X_i(f)*\xi_i \\
&= -*d\sum_i X_i(f)(-1)^{i-1}\xi_1\wedge\ldots\wedge\hat{\xi}_i\wedge\ldots\wedge\xi_n \\
&= -*\sum_i(-1)^{i-1}d\left(X_i(f)\right)\xi_1\wedge\ldots\wedge\hat{\xi}_i\wedge\ldots\wedge\xi_n \\
&\quad - \underbrace{*\sum_i(-1)^{i-1}X_i(f)d\left(\xi_1\wedge\ldots\wedge\hat{\xi}_i\wedge\ldots\wedge\xi_n\right)}_{=0 \text{ (siehe unten)}} \\
&= -*\sum_i(-1)^{i-1}\sum_k X_kX_i(f)\xi_k\wedge\xi_1\wedge\ldots\wedge\hat{\xi}_i\wedge\ldots\wedge\xi_n \\
&= -*\sum_i(-1)^{i-1}X_iX_i(f)\xi_i\wedge\xi_1\wedge\ldots\wedge\hat{\xi}_i\wedge\ldots\wedge\xi_n \\
&= -*\sum_i X_iX_i(f)\xi_1\wedge\ldots\wedge\xi_n = -\sum_i X_iX_i(f) = \mathcal{C}f
\end{aligned}
$$

Noch z.z.: $d\left(\xi_1\wedge\ldots\wedge\hat{\xi}_i\wedge\ldots\wedge\xi_n\right) = 0$, betrachte dazu oBdA $i = n$. Es gilt

$$d\xi_j = \sum_{k,l} a_{kl}^{(j)}\xi_k\wedge\xi_l,$$

wobei die Koeffizienten noch zu bestimmen sind. Sei $[X_\alpha, X_\beta] = \sum_\gamma f_{\alpha\beta\gamma}X_\gamma$, dann:

$$a_{kl}^{(j)} = d\xi_j(X_k, X_l) = \underbrace{X_k\xi_j(X_l) - X_l\xi_j(X_k)}_{=0} - \xi_j([X_k, X_l]) = -f_{klj}$$

Wenn G kompakt ist, sind diese total antisymmetrisch, denn: Die Antisymmetrie in den ersten beiden Indizes ist klar und außerdem gilt $[X_\alpha, X_\beta] = ad(X_\alpha)(X_\beta)$, also ist $(f_{\alpha\beta\gamma})_{\beta\gamma} = (ad(X_\alpha)_{\beta\gamma})$ die Matrix von $ad(X_\alpha)$. Es gilt weiter $B(ad(X_\alpha)X, Y) = -B(X, ad(X_\alpha)Y)$ für beliebige $X, Y \in \mathfrak{g}$. Mit unseren Voraussetzungen folgt daraus die Schiefsymmetrie der Matrix, d.h. $f_{\alpha\beta\gamma} = -f_{\alpha\gamma\beta}$.

Damit folgt:

$$\begin{aligned} d\left(\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{n-1}\right) &= \sum_{j=1}^{n-1} \epsilon_j \xi_1 \wedge \ldots \wedge d\xi_j \wedge \ldots \wedge \xi_{n-1} \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \epsilon_j \sum_{kl} -f_{klj} \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{j-1} \wedge \xi_k \wedge \xi_l \wedge \xi_{j+1} \wedge \ldots \wedge \xi_{n-1} \end{aligned}$$

Offensichtlich sind alle Terme 0, in denen nicht einer der Indizes k, l gleich n und der andere j ist. Damit sind aber zwei Indizes gleich, also nach dem oben gesagten $f_{klj} = 0$. qed

1.2 Berechnung der Eigenwerte

Erinnerung: Darstellungen von $\mathfrak{g}$ auf komplexen Vektorräumen stehen in 1:1-Beziehung zu unitären linken $U(\mathfrak{g})$-Moduln. Damit sind irreduzible Darstellungen von $\mathfrak{g}$ insbesondere invariant unter $\mathcal{C}$ und nach dem Schurschen Lemma operiert dieser als Skalar. Diese Zahlen will ich zunächst bestimmen und anschließend begründen, warum sie tatsächlich die Eigenwerte des Laplaceoperators liefern.

Den irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{g}$ sind eindeutig die Höchstgewichte λ zugeordnet. Um den entsprechenden ,,Eigenwert" auszurechnen, genügt es, $\mathcal{C}$ auf einen Vektor anzuwenden, dazu wähle ich einen Höchstgewichtsvektor v_λ. Dafür brauche ich noch eine andere Darstellung von $\mathcal{C}$.
Wir betrachten jetzt $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$, wählen eine Cartan-Unteralgebra $\mathfrak{h}$. Sei $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$
Wurzelsystem und Δ^+ Menge der positiven Wurzeln.

Lemma: Sei $\mathfrak{h}_0$ Realform von $\mathfrak{h}$, auf der alle Wurzeln reell sind, und $\{H_i\}_{i=1,\ldots,l}$ ONB von $\mathfrak{h}_0$ bzgl. B. Wähle Wurzelvektoren E_α, so dass $B(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1$, dann gilt

$$\mathcal{C} = \sum_{i=1}^{l} H_i^2 + \sum_{\alpha\in\Delta} E_\alpha E_{-\alpha} = \sum_{i=1}^{l} H_i^2 + \sum_{\alpha\in\Delta^+} \left(E_\alpha E_{-\alpha} + E_{-\alpha} E_\alpha\right)$$

Beweis: Da $\mathcal{C}$ unabhängig von der Basis ist, können wir die Basis einsetzen, die aus den H's und E's besteht. Wir müssen also B in dieser Basis bestimmen. Da $B(H_i, E_\alpha) = 0$ *(denn $ad(H_i)ad(E_\alpha)$ hat Nulldiagonale)*, hat die Matrix von B Blockgestalt und der erste Block ist die Einheitsmatrix, da die H's orthonormal gewählt wurden. Außerdem gilt auch $B(E_\alpha, E_\beta) = 0$ (*siehe [Knapp], Prop. II.2.17*) für $\alpha \neq -\beta$ und $B(E_\alpha, E_{-\alpha})$ ist nach Voraussetzung 1. Da diese Matrix zu sich selbst invers ist, folgt die Formel. qed

Satz: Auf einer irreduziblen Darstellung von $\mathfrak{g}$ mit höchstem Gewicht λ operiert $\mathcal{C}$ als Skalar $|\lambda|^2 + 2\langle\lambda, \delta\rangle = |\lambda + \delta|^2 - |\delta|^2$, wobei δ die halbe Summe der positiven Wurzeln ist.
Zusatz: Diese Zahl ist genau dann 0, wenn die Darstellung trivial ist.

Beweis: Mit $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = H_\alpha$ erhält man aus obiger Formel

$$\mathcal{C} = \sum_{i=1}^{l} H_i^2 + \sum_{\alpha\in\Delta^+} H_\alpha + \sum_{\alpha\in\Delta^+} E_{-\alpha}E_\alpha = \sum_{i=1}^{l} H_i^2 + 2H_\delta + \sum_{\alpha\in\Delta^+} E_{-\alpha}E_\alpha$$

Dabei ist $\delta = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta^+}\alpha$ und H_ϕ für $\phi \in \mathfrak{h}^*$ wie im vorletzten Vortrag eingeführt. Für einen Vektor $v_\lambda \neq 0$ mit Gewicht λ erhält man damit:

$$\mathcal{C}v_\lambda = \sum_{i=1}^{l} \lambda(H_i)^2 v_\lambda + 2\lambda(H_\delta)v_\lambda = (|\lambda|^2 + 2\langle\lambda, \delta\rangle)v_\lambda$$

Hier ist $\langle ., .\rangle$ die Bilinearform, die wir auf $\mathfrak{h}^*$ eingeführt hatten. qed

1.3 Bestimmung der Darstellungen

Situation: G wie oben, zusätzlich zusammenhängend und einfach zusammenhängend *(damit besteht eine 1:1-Beziehung zwischen Liegruppe und Liealgebra)*

Jede endlichdim. Darst. von G auf einem komplexen Vektorraum $\pi : G \to Aut(V)$ induziert eine Darst. von $\mathfrak{g}$ (und damit auch $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$), durch:

$$\tilde{\pi}(X)v := (X(\pi(.)v))(e)$$

(Ableitung der Funktion $g \mapsto \pi(g)v$ in Richtung X ausgewertet am Einselement)
In die andere Richtung kommt man mit der Exponentialabbildung.
Dabei gehen jeweils irreduzible Dartsellungen in irreduzible Dartsellungen über.

Wir betrachten jetzt die Linksreguläre Darstellung von G auf L^2, nach dem Peter-Weyl-Theorem ist diese die direkte Summe von Vertretern der Äquivalenzklassen irreduzibler Darstellungen von G, wobei jede so oft vorkommt, wie ihre Dimension ist. Auf den irreduziblen Darstellungen - die nach dem gerade gesagten auch irreduzible Darstellungen von $\mathfrak{g}$ sind - operiert $\mathcal{C} = \Delta$ wie oben beschrieben als Skalar, d.h. die entsprechenden Vektorräume sind Eigenräume von Δ. Damit haben wir die Spektralzerlegung von Δ auf $L^2(G)$ gefunden.

2 Beispiele

2.1 $SU(2)$

Die Liealgebra von $SU(2)$ ist $su(2)$, die (reelle) Algebra der (komplexen) hermiteschen (2×2)-Matrizen mit Spur 0, und deren Komplexifizierung ist $sl(2, \mathbb{C})$. Wir benötigen also die irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{g} = sl(2, \mathbb{C})$.
Erinnerung: Wir hatten die Basis h, e, f mit den Kommutatorrelationen

$$[h, e] = 2e \quad [h, f] = -2f \quad [e, f] = h$$

Satz: Zu jeder natürlichen Zahl m gibt es eine (eindeutige) irreduzible Darstellung π von $sl(2,\mathbb{C})$ auf einem Komplexen Vektorraum der Dimension m. Es gibt eine Basis $\{v_0, \dots v_{m-1}\}$ von V, so dass gilt:

1. $\pi(h)v_k = (m-1-2k)v_k$
2. $\pi(e)v_k = k(m-k)v_{k-1}$ für $k > 0$ und $\pi(e)v_0 = 0$
3. $\pi(f)v_k = v_{k+1}$ mit $v_m := 0$

Erinnerung: Es ist $\mathfrak{h}$ ($\mathfrak{h}_0$) die Menge der (reellen) Diagonalmatrizen, mit $e_i \in \mathfrak{h}^*$ definiert durch $e_i \begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{pmatrix} = h_i$ sind $\alpha = e_1 - e_2$ und $-\alpha = e_2 - e_1$ die Wurzeln von $\mathfrak{g}$ (wobei α positiv ist).
Bestimmung der Gewichte: Diese müssen die Eigenschaft $\frac{2\langle\lambda,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} \in \mathbb{Z} \;\; \forall \alpha \in \Delta$ haben. Da $\mathfrak{h}$ und damit $\mathfrak{h}^*$ eindimensional ist, ist λ ein Vielfaches von α und aus obiger Bedingung folgt $\lambda = \frac{n}{2}\alpha = n\delta$ mit $n \in \mathbb{Z}$. Für $n \geq 0$ ist λ dominant und damit gibt es eine irreduzible Darstellung ϕ_n von $\mathfrak{g}$ mit höchstem Gewicht λ. Diese hat Dimension $n+1$. Mit der oben gezeigten Formel ergibt sich also der Eigenwert $\frac{n^2}{4}|\alpha|^2 + \frac{n}{2}\langle\alpha,\alpha\rangle = \frac{n}{2}(\frac{n}{2}+1)|\alpha|$ mit Vielfachheit $(n+1)^2$. (Nach Peter-Weyl kommt jede Darstellung in der Zerlegung so oft vor, wie ihre Dimension ist.)

2.2 S^2

Den Fall eines kompakten symmetrischen Raumes, den ich im Allgemeinen nicht betrachtet habe, will ich am Beispiel $S^2 = SU(2)/U(1)$ erklären.
Zunächst müssen wir $L^2(S^2)$ bestimmen. Das müssen Funktionen auf $SU(2)$ sein, die invariant unter der (rechts-)Operation von $U(1)$ sind, d.h.

$$L^2(S^2) = \{f \in L^2(SU(2)) | f(gk) = f(g) \, \forall \, k \in U(1)\}$$

Als nächstes müssen wir feststellen, welche irreduziblen Darstellungen von G in dieser Menge enthalten sind. Nach Peter-Weyl wird L^2 von Matrixkoeffizienten irreduzibler Darstellungen aufgespannt, also von Funktionen der Form $f(\cdot) = (v, \pi(\cdot)w)$. Damit erhält man die Invarianz-Bedingung

$$(v, \pi(g)w) = (v, \pi(gk)w) = (v, \pi(g)\pi(k)w) \Leftrightarrow \pi(k)w = w \, \forall \, k \in U(1)$$

D.h.: eine irreduzible Darstellung π von G auf einem Vektorraum V kommt in der Zerlegung vor, wenn es einen Vektor $w \in V$ mit dieser Eigenschaft gibt, und ihre Vielfachheit ist gleich der Zahl dieser Vektoren.
Jetzt müssen wir diese noch mit geeigneten der obigen Darstellungen von $\mathfrak{g}$ identifizieren. Mit der obigen Zuordnung $\pi \to \tilde{\pi}$ erhalten wir:

$$\pi(k)w = w \, \forall \, k \in U(1) \Leftrightarrow \tilde{\pi}(X)w = 0 \, \forall \, X \in u(1)$$

Es gilt $u(1) = \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, also lautet die Bedingung: $\exists w \in V : \tilde{\pi}(h)w = 0$. Nach dem Satz gilt für $m - 1 = 2k : \tilde{\pi}(h)v_k = 0$, dann ist $\dim(V) = m = 2k+1, k \in \mathbb{N}_0$, es kommen also genau die ungerade dimensionalen Darstellungen vor, und das mit Vielfachheit 1. Damit ist $n = 2k$ und die zugehörigen Eigenwerte sind $k(k+1)|\alpha|$.