```
----------- Seminarvortrag am Donnerstag 22. Mai 2002 -----------
--------- Vorsicht Tippfehler, nicht korrigierte Version ----------
```

1. Mehr über unbeschränkte Operatoren

Sei $A : \mathrm{dom}(A) \to \mathcal{H}$ ein unbeschränkter Operator in einem komplexen Hilbertraum $\mathcal{H}$. Der Graph $\mathcal{G}(A)$ ist definiert durch

$$\mathcal{G}(A) = \{(x, y) \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H};\ x \in \mathrm{dom}(A), y = Ax\}$$

Definition 1.1. *Folgende Begriffe werden wir verwenden.*

- *Ein Operator heißt abgeschlossen, wenn sein Graph abgeschlossen ist.*
- *Ein Operator heißt abschließbar, wenn $\overline{\mathcal{G}}$ wieder ein Operatorgraph ist. Den zugehörigen Operator bezeichnen wir mit $\overline{A}$.*
- *A heißt wesentlich selbstadjungiert, wenn A abschließbar ist, und $\overline{A}$ selbstadjungiert ist.*

Proposition 1.2. *Folgende Aussagen sind nicht schwer zu beweisen.*

- *A ist genau dann abgeschlossen, wenn aus $\psi_n \to \psi$ und $A\psi_n \to \phi$ folgt $\psi \in \mathrm{dom}(A)$ und $A\psi = \phi$.*
- *A ist genau dann abgeschlossen, wenn $\mathrm{dom}(A)$ mit der Norm $||\psi||_A^2 = ||\psi||^2 + ||A\psi||^2$ ein Hilbertraum ist.*
- *Ist $V : \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \to \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ definiert durch $V(\phi, \psi) := (-\psi, \phi)$, dann gilt die Gleichung $\mathcal{G}(A^*) = V[\mathcal{G}(A)]^\perp$.*
- *A^* ist immer abgeschlossen (jedoch nicht notwendigerweise dicht definiert).*
- *Ist A^* dicht definiert, so ist A abschliessbar und $\overline{A} = A^{**}$. Jeder symmetrische Operator ist somit abschliessbar.*
- *A ist wesentlich selbstadjungiert wenn A^* dicht definiert ist, und $A^* = A^{**}$ gilt. Dann ist sogar $\overline{A} = A^*$.*

Proof. Die drei ersten Aussagen folgen unmittelbar aus den Definitionen. Die anderen Aussagen folgen jeweils aus den Vorhergehenden. □

Wir erinnern uns, daß für einen abgeschlossenen Operator A die Resolventenmenge definiert ist durch

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ (A - z)^{-1} \text{ exisitiert und ist beschränkt.}\}$$

Das Spektrum $\rho(A)$ von A ist:

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \backslash \rho(A).$$

Für die Resolvente gilt die Resolventengleichung

$$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\lambda - \mu) R_\lambda(A) R_\mu(A).$$

Man kann zeigen, daß die Resolvente

$$R_z(A) := (A - z)^{-1}$$

eine holomorphe Funktion auf $\rho(A)$ mit Werten in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist (Hinweis: bentutze von Neumann Reihe und Resolventengleichungen). Wir haben bereits gesehen, daß für einen selbstadjungierten Operator $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ gilt.

Für unsere Zwecke ist nun folgende Einsicht relevant:

Proposition 1.3. *Ist A abgeschlossen und $z \in \rho(A)$. Dann ist $R_z(A)$ eine stetige Abbildung von $\mathcal{H}$ auf den Hilbertraum* dom(A).

Proof. Eine stetige surjektive und injektive Abbildung zwischen Banachräumen hat ein stetiges Inverses. Dies folgt aus dem Satz von der offenen Abbildung. □

Proposition 1.4. *Ist A ein selbstadjungierter Operator, so sind folgende Aussagen äquivalent.*

- *Es exisitiert ein Punkt $z \in \rho(A)$, sodass $R_z(A)$ kompakt als Operator in $\mathcal{H}$ ist.*
- *$R_z(A)$ ist kompakt als Operator in $\mathcal{H}$ für alle $z \in \rho(A)$.*
- *Die Einbettung* dom$(A) \to \mathcal{H}$ *ist kompakt, wobei wir wieder* dom(A) *als Hilbertraum mit der Norm $||\cdot||_A$ verstehen.*
- *Der Einheitsball in* dom(A) *sit kompakt in $\mathcal{H}$.*

Proof. Die Äquivalenz der beiden ersten Aussagen folgt unmittelbar aus der Resolventengleichung, und der Tatsache, daß die kompakten Operatoren ein Ideal in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ bilden. Wir wissen nun, daß $(A-\mu)^{-1}$ eine stetige bijektive Abbildung von $\mathcal{H}$ auf dom(A) ist. Damit ist $(A-\mu)^{-1}$ als Operator von $\mathcal{H}$ nach $\mathcal{H}$ genau dann kompakt, wenn die Einbettung dom$(A) \to \mathcal{H}$ kompakt ist. □

Definition 1.5. *Ein Operator, der eine der obigen Bedingungen erfüllt heißt Operator mit kompakter Resolvente.*

Wie wir bereits gesehen haben gilt folgender Satz:

Theorem 1.6. *Ein selbstadjungierter Operator hat genau dann kompakte Resolvente, wenn er ein reines Punktspektrum besitzt und sich die Eigenwerte höchstens im Unendlichen häufen.*

Es gibt viele Möglichkeiten zu sehen, ob ein symmetrischer Operator wesentlich selbst-adjungiert ist. Hier zwei nützliche Kriterien.

Proposition 1.7. *Folgende Aussagen gelten.*

- *Ein symmetrischer Operator, welcher eine totale Menge analytischer Vektoren enthält ist wesentlich selbstadjungiert (Nelsons analytic vector theorem)*
- *Gilt für einen symmetrischen Operator T die Aussage* $\ker(T^* \pm \mathrm{i}) = \{0\}$*, so ist T wesentlich selbstadjungiert.*

Wir werden aber nur folgenden Spezialfall der ersten Aussage benötigen und deshalb auch nur diesen beweisen.

Proposition 1.8. *Ein symmetrischer Operator, welcher eine totale Menge an Eigenvektoren besitzt ist wesentlich selbstadjungiert.*

Proof. Wir können in diesem Fall den Hilbertraum schreiben als direkte Summe

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\lambda} \mathcal{H}_\lambda,$$

wobei die direkte Summe über alle Eigenwerte läuft und $\mathcal{H}_\lambda$ der zugehörige Eigenraum ist. der Operator A wirkt dann auf $\mathcal{H}_\lambda$ durch Multiplikation mit λ. Das gleiche gilt natürlich auch für den Abschluss $\overline{A}$ von A. D.h. $\overline{A}$ ist ein abgeschlossener Operator, der alle $\mathcal{H}_\lambda$ invariant läßt und dort durch Multiplikation mit λ wirkt. Der Abschluss des Operators A ist dadurch aber schon eindeutig bestimmt, d.h.

$$\mathrm{dom}(\overline{A}) = \{(\psi_\lambda) \in \mathcal{H};\ (\lambda\psi_\lambda) \in \mathcal{H}\},$$

und

$$A(\psi_\lambda) = (\lambda\psi_\lambda).$$

Dieser Operator ist jedoch selbstadjungiert nach dem Spektralsatz. □

2. Beispiele für Operatoren mit kompakter Resolvente

2.1. **Tori.** Sei $(e_1, \dots, e_n)$ eine Basis für $\mathbb{R}^n$. Diese Basis spannt ein Gitter L im $\mathbb{R}^n$ auf

$$L = \{\sum_{i=1}^{n} a_i e_i;\ a_i \in \mathbb{Z}\}.$$

Wir fassen L als Untergruppe von $\mathbb{R}^n$ auf. Die Gruppe L ist natürlich isomorph zu $\mathbb{Z}^n$. Der Quotienteraum $T^n := \mathbb{R}^n/L$ ist kanonisch homöomorph zum n-Torus. Die glatten Funktionen auf T^n können identifiziert werden mit den periodischen Funktionen f auf $\mathbb{R}^n$ identifiziert werden, d.h. Funktionen welche

$$f(x + e_i) = f(x)$$

erfüllen, oder äquivalent $f(x+L) = f(x)$. T^n erbt von $\mathbb{R}^n$ in natürlicher Weise eine Riemannsche Metrik und der Laplaceoperator ist unter der obigen Identifikation gerade der gewöhnliche Laplace Operator auf dem $\mathbb{R}^n$. Ein Fundamentalbereich für die Wirkung von $\mathbb{Z}^n$ auf $\mathbb{R}^n$ ist die Menge

$$F := \{\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i;\ \alpha_i \in [0,1]\}.$$

Das Skalarprodukt auf dem Raum $C^\infty(T^n)$ ist dann gegeben durch

$$\langle f, g\rangle = \int_F f^*(x) g(x) dx,$$

wobei dx das gewöhnlich Lebesgue Maß ist. Die Vervollständigung dieses Prähilbertraumes ist der Raum der quadratintegrablen Funktionen $L^2(T^n)$. Sei nun L^* das zu L duale Gitter, d.h.

$$L^* = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \langle x, y\rangle \in \mathbb{Z} \quad \forall y \in L\}.$$

Proposition 2.1. *Die Funktionen*

$$\phi_a(x) := e^{2\pi \mathrm{i}\langle a,x\rangle}, \quad a \in L^*$$

bilden eine Orthogonalbasis in $L^2(T^n)$ *mit* $||\phi_a|| = \mathrm{Vol}(F)^{1/2}$.

Proof. Die Funktionen sind natürlich periodisch, d.h.

$$\phi_y(x+L) = \phi_y(x).$$

Sie sind damit glatte Funktionen auf T^n. Des weiteren ist $\mathrm{span}(\phi_a)$ eine punktetrennende Unteralgebra von $C(T^n)$ mit Eins. Damit ist der Raum, der von den Funktionen aufgespannt wird dicht in $C(T^n)$ und damit auch in $L^2(T^n)$. Es bleibt nur Orthogonalität zu zeigen.

$$\langle \phi_a, \phi_b\rangle = \int_F e^{2\pi \mathrm{i}\langle b-a,x\rangle} dx =$$

$$= \mathrm{Vol}(F) \cdot \int_{[0,1]^n} e^{2\pi \mathrm{i}\langle b-a, \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\rangle} d\alpha_1 \cdots d\alpha_n = \mathrm{Vol}(F)\delta_{ab}.$$

□

Die Funktionen ϕ_a sind natürlich Eigenfunktionen zum Laplaceoperator Δ mit Eigenwerten $4\pi^2|a|^2$. Wir haben

Theorem 2.2. *Der Laplaceoperator* $\Delta : C^\infty(T^n) \to L^2(T^n)$ *ist wesentlich selbstadjungiert, d.h.* $\overline{\Delta}$ *ist selbstadjungiert. Der Operator* $\overline{\Delta}$ *hat kompakte Resolvente. Die Spektralschar* E_λ *ist gegeben durch die orthogonale Projektion auf den Unterraum*

$$\mathrm{span}\{\phi_a;\ a \in L^*, 4\pi^2|a|^2 \le \lambda\}.$$

Proof. Δ ist natürlich symmetrisch und somit abschließbar. Da $C^\infty(T^n)$ eine totale Menge an Eigenvektoren besitzt ist Δ wesentlich selbstadjungiert. Der Rest ergibt sich sofort. $\square$

2.2. **Der harmonische Oszillator.** Erst ein kleiner Ausflug in die Quantenmechanik. Die Axiome der Quantenmechanik sind wie folgt:

- Der Zustand eine physikalischen Systems wird gegeben durch einen eindimensionalen Unterraum eines separablen komplexen Hilbertraumes.
- Es existiert ein selbstadjungierter Operator H (Hamiltonoperator), sodass die Zeitentwicklung des Systems gegeben ist durch die unitäre Einparametergruppe e^{iHt}. I.e. befindet sich das System zur Zeit 0 im Zustand $\mathbb{C}\psi$, so befindet es sich zur Zeit t um Zustand $\mathbb{C}e^{-iHt}\psi$.
- Observablen sind selbstadjugierte Operatoren. Ist das System im Zustand $\mathbb{C}\psi$, und wird die Observable A gemessen, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Messwert in der messbaren Menge I liegt gerade der Erwartungswert $||P_I\psi||^2||\psi||^{-2}$. Hier ist P_I der Spektralprojektor $\int_I dE_\lambda$, der zum selbstadjungieren Operator A gehört.

Für die Quantenmechanik eines Teilchens ist $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n, dx)$. Messung der Ortskoorindate x_i entspricht der Obeservablen x_i, welche wir als Multiplikationsoperator $x_i\psi = x_i \cdot \psi$ mit maximalem Definitionsbereich verstehen. Messung des Impulses in x_i-Richtung entspricht der Observablen $p_i = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_i}$, wobei wir hier einfach definieren $p_i = \mathcal{F}^{-1}x_i\mathcal{F}$, und damit p_i automatisch selbstadjungiert ist. Die Zeitentwicklung des Systems wird nun durch den Hamiltonoperator beschrieben. Dies ist gerade die Observable, welche zur Messung der Energie des Teilchens korrespondiert. Für ein Teilchen im Potential $V(x)$ erwarten wir daher

$$H = \frac{p_i^2}{2m} + V = \Delta + V,$$

wobei Δ der Laplaceoperator ist. Die Frage nach dem Domain und der Selbastadjungiertheit ist für beliebige Potentiale nichttrivial aber gut untersucht.

Wir interessieren uns nun für die Quantenmechanik eines Teilchens im äusseren Potential $V(x) = x^2$. Dieses System bezeichnet man als den eindimensionalen quantenmechanischen harmonischen Oszillator.

Im Hilbertraum $L^2(\mathbb{R}, dx)$ untersuchen wir also den symmetrischen Operator $A : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}, dx)$, welcher durch

$$A = \Delta + x^2$$

gegeben ist (wir setzen hier einfach mal $m = 1/2$). Nun fragen wir ob dieser Operator wesentlich selbstadjungiert ist. Es gilt

Theorem 2.3. *Der Operator A ist wesentlich selbstadjungiert. Sein Abschluß $H = \overline{A}$ ist ein selbstadjungierter Operator mit kompakter Resolvente. Die Funktionen*

$$\phi_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$$

bilden eine Orthogonalbasis in $L^2(\mathbb{R}, dx)$ und es gilt

$$H\phi_n = (2n+1)\phi_n.$$

Das Spektrum $\sigma(H)$ ist also $\{(2n+1);\ n \in \mathbb{N}_0\}$.

Proof. Es ist nicht schwer zu zeigen, daß die obigen Ausdrücke eine Orthonormalbasis bilden und Eigenfunktionen sind. Der Rest folgt aus Nelsons Kriterium und dem Spektralsatz. □

Was genauer hinter der Tatsache steckt, daß dieser Operator kompakte Resolvente hat, ist die Tatsache, daß $\mathrm{dom}(\overline{A})$ kompakt in $\mathcal{H}$ eingebettet ist. Dies folgt aus Rellichs Kriterium, welches ich zum Schluss noch angeben will.

Definition 2.4. *Sei F eine messbare fast überall nichtnegative Funktion auf $\mathbb{R}^n$. Wir schreiben $V(x) \to \infty$, wenn es zu jeder Zahl $C > 0$ eine kompakte Menge $K \in \mathbb{R}^n$ gibt, sodass $V(x) > C$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n \backslash K$.*

Theorem 2.5 (Rellichs Kriterium)**.** *Seien F und G zwei messbare und fast überall nichtnegative Funktionen mit $F \to \infty$ und $G \to \infty$. Dann ist*

$$S = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}^n);\ ||\psi|| \leq 1, \int F(x)|\psi(x)|^2 dx \leq 1, \int G(p)|\hat{\psi}(p)|^2 dp \leq 1\}$$

eine kompakte Teilmenge in $L^2(\mathbb{R}^n)$.