SEMINAR ÜBER DIRAC–OPERATOREN IN DER RIEMANNSCHEN GEOMETRIE

Spin–DARSTELLUNG

ARTUR WOTZKE

1. Einführung

1.1. Clifford Algebra. Sei V ein $\mathbb{k}$–Vektorraum mit $\mathrm{char}(\mathbb{k}) \neq 2$, b bilineare Form auf V und q die dazu assoziierte, quadratische Form auf V. Sei ferner

$$T(V) = \bigoplus_{k \geq 0} \otimes^k V = \mathbb{k} \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus (\otimes^3 V) \oplus \dots$$

Tensoralgebra auf V und $I_q(V)$ ein Ideal in $T(V)$, der durch Elemente der Form

$$v \otimes w + w \otimes v + 2b(v, w)1$$

mit $v, w \in V$ erzeugt wird, d.h.,

$$I_q = \Big\{ \sum_{\text{endlich}} V_i \otimes (v_i \otimes w_i + w_i \otimes v_i + 2b(v_i, w_i)1) \otimes W_i \,|\, v_i, w_i \in V,\ V_i, W_i \in T(V) \Big\}.$$

Definition 1.1. Ein Paar $(Cl(V, q), i_q) = Cl(V, q)$ heißt *Cliffordalgebra* von (V, q) falls

(1) $Cl(V, q)$ ist eine assoziative $\mathbb{k}$–Algebra mit Eins.
(2) $i_q \colon V \to Cl(V, q)$ ist eine lineare Abbildung und

$$i_q(v)^2 = -q(v) \cdot 1$$

gilt für alle $v \in V$.
(3) (Universelle Eigenschaft) Ist $\mathcal{A}$ eine weitere assoziative $\mathbb{k}$–Algebra mit $\mathbb{1}_{\mathcal{A}}$ sowie $u \colon V \to \mathcal{A}$ eine $\mathbb{k}$–lineare Abbildung mit $u(v)^2 = -q(v) \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{A}}$, so existiert genau ein Algebrahomomorphismus $\tilde{u} \colon Cl(V, q) \to \mathcal{A}$ mit $u = \tilde{u} \circ i_q$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "i_q"] \arrow[dr, "u"'] & Cl(V,q) \arrow[d, "\exists!\, \tilde{u}"] \\ & \mathcal{A} \end{tikzcd}$$

Satz 1.2. *Sei V ein $\mathbb{k}$–Vektorraum.*

i) Jede quadratische Form q auf V induziert eine Cliffordalgebra $Cl(V, q)$.

Datum: Mai 2001.

ii) Seien $Cl(V,q)$ und $\widehat{Cl}(V,q)$ zwei Cliffordalgebren der gleiche quadratischen Form q, dann existiert ein Isomorphismus $\Psi\colon Cl(V,q) \to \widehat{Cl}(V,q)$ der Algebren mit $\Psi \circ i_q = \widehat{i_q}$, d.h.,

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "i_q"] \arrow[dr, "\widehat{i_q}"'] & Cl(V,q) \arrow[d, "\Psi"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & \widehat{Cl}(V,q). \end{tikzcd}$$

Beweis. (Existenz) Sei $Cl(V,q) = T(v)/I_q(V)$ und $\pi\colon T(V) \to Cl(V,q)$ die Projektion sowie $i\colon \hookrightarrow T(V)$ natürliche Inklusion, so wird durch

$$i_q = \pi \circ i$$

eine lineare Abbildung $i_q\colon V \to Cl(V,q)$ definiert, für die $i_q(v)^2 = -q(v)\cdot 1$ nach Konstruktion gilt. Weiterhin, jede lineare Abbildung $u\colon V \to \mathcal{A}$ in eine Algebra setzt sich mittels

$$U(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = u(v_1)\cdots u(v_k)$$

zu einem Algebrahomomorphismus $U\colon T(V) \to \mathcal{A}$ fort. Gilt $u(v)^2 = -q(v)\mathbb{1}_{\mathcal{A}}$, so erhalten wir

$$I_q(V) \subset \ker(U)$$

und daher induziert U einen Homomorphismus

$$\tilde{u}\colon Cl(V,q) \to \mathcal{A}$$

mit der gewünschten Eigenschaft. Ist $\tilde{u}'\colon Cl(V,q) \to \mathcal{A}$ ein weiterer Homomorphismus mit

$$u = \tilde{u} \circ i_q = \tilde{u}' \circ i_q.$$

Dann stimmen $\tilde{u}$ und $\tilde{u}'$ auf $i_q(V) \subset Cl(V,q)$ überein. Nun erzeugen aber die Elemente aus dem Vektorraum V die Tensoralgebra $T(V)$ und damit auch die Cliffordalgebra $Cl(V,q)$ multiplikativ. Demnach ist $\tilde{u} \equiv \tilde{u}'$.
Eindeutigkeit ist eine direkte Konsequenz der dritten Bedingung für $Cl(V,q)$. □

Folgerung. Die lineare Abbildung $i_q\colon V \to Cl(V,q)$ ist injektiv. Die Menge $i_q(V) \subset Cl(V,q)$ erzeugt die Algebra $Cl(V,q)$ multiplikativ, d.h., für eine Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ von V kann $\varphi \in Cl(V,q)$ in der Form

$$\text{(S)} \qquad \varphi = \sum_{i_\nu \in \{0,1\}} f_{i_1\dots i_n} v_1^{i_1}\cdots v_n^{i_n}, \text{ mit } f_{i_1\dots i_n} \in \mathbb{R}$$

geschrieben werden (Diese Darstellung ist eindeutig).

Wir wollen mit $Cl^{[k]}(V,q)$ die Menge der Elemente der Cliffordalgebra $Cl(v,q)$ beschreiben, die von der Form (S) sind mit $j_1+\cdots+j_n = k$. Also ist $Cl^{[0]}(V,q) = \Bbbk$ und $Cl^{[1]}(V,q) = V$. Ferner lassen sich sofort Cliffordmultiplikationsregeln ableiten

$$\text{(R)} \qquad v_i \cdot v_j + v_j \cdot v_i = -2b(v_i, v_j).$$

△

Auf der Cliffordalgebra $Cl(V,q)$ definieren wir eine Involution

$$\alpha\colon Cl(V,q) \to Cl(V,q) \quad \text{mit} \quad \alpha(v) = -v \text{ auf } V, \tag{1.1}$$

genauer $\alpha(i_q(v)) = -i_q(v)$.

Weil $\alpha^2 = \mathrm{id}_V$ ist, existiert eine Zerlegung

$$Cl(V,q) = Cl^{(0)}(V,q) \oplus Cl^{(1)}(V,q),$$

wobei $Cl^{(k)} := \{\varphi \in Cl(V,q) \,|\, \alpha(\varphi) = (-1)^k\varphi \text{ für } k = 0,1\}$ Eigenräume von α sind. Es gilt

$$Cl^{(j)}(V,q) \cdot Cl^{(k)}(V,q) \subset Cl^{(j+k)}(V,q).$$

Es ist einfach einzusehen, dass

$$Cl^{(0)}(V,q) = \bigoplus_{k=2(m+1)} Cl^{[k]}(V,q) \text{ und } Cl^{(1)}(V,q) = \bigoplus_{k=2m+1} Cl^{[k]}(V,q)$$

ist, wobei $m = 1, \dots, [\frac{n-1}{2}]$ und $n = \dim_{\mathbb{k}} V$.

Sei $v_1, \dots, v_n$ ON_q–Basis von V, dann ist

$$^\top\colon Cl(V,q) \to Cl(V,q) \quad \text{mit} \quad a \mapsto a^\top \tag{1.2}$$

definiert durch

$$(v_{i_1} \cdots v_{i_k})^\top = v_{i_k} \cdots v_{i_1} = (-1)^{\binom{k}{2}} v_{i_1} \cdots v_{i_k}, \text{ weil } b(v_i, v_j) = \delta_{ij}, \tag{1.3}$$

wobei $v_{i_1} \cdots v_{i_k}$ mit $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$ Basisvektoren der Clifforgalgebra $Cl(V,q)$ sind, mit $\deg(v_{i_1} \cdots v_{i_k}) = k$. Für alle $a, b \in Cl(V,q)$ gilt

$$(a \cdot b)^\top = b^\top \cdot a^\top,$$

also ist insbesondere für $a \in Pin(V,q)$

$$a \cdot a^\top = a^\top \cdot a = \begin{cases} +1, & \text{falls } \deg(a) = 0(2) \\ -1, & \text{falls } \deg(a) = 1(2). \end{cases}$$

Damit können wir im Fall $\deg(a) = 0(2)$ auch vom Inversen von a sprechen, mit $a^\top = a^{-1}$ und im Fall $\deg a = 1(2)$ setzen wir $a^{-1} = \alpha(a)a^\top$.

Satz 1.3. *a) Das Zentrum der Cliffordalgebra $Cl(V,q)$ ist gegeben durch*

$$\mathrm{Zent}(Cl(V,q)) = \begin{cases} \mathbb{k}, & \textit{falls } \dim_{\mathbb{k}} V = 0(2), \\ \mathbb{k} \oplus \mathbb{k}[v_1 \cdots v_n], & \textit{falls } \dim_{\mathbb{k}} V = 1(2). \end{cases} \tag{Z}$$

b) Das Zentrum der Algebra $Cl^{(0)}(V,q)$ ist gegeben durch

$$\mathrm{Zent}(Cl^{(0)}(V,q)) = \begin{cases} \mathbb{k} \oplus \mathbb{k}[v_1 \cdots v_n], & \textit{falls } \dim_{\mathbb{k}} V = 0(2), \\ \mathbb{k}, & \textit{falls } \dim_{\mathbb{k}} V = 1(2). \end{cases} \tag{Z$^{(0)}$}$$

Bemerkung. Wir werden in Theorem 1.4 den tieferen Grund für dieses Verhalten kennen lernen.

Beweis. Sei $\mathbf{i}_k := \{i_1, \dots, i_k\}$ mit $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$ und $v_{\mathbf{i}_k} := v_{i_1} \cdots v_{i_k}$ mit $v_{i_j} \in V$. Dann muss für ein a aus dem Zentrum

$$v_{\mathbf{i}_k} \cdot a = a \cdot v_{\mathbf{i}_k} \text{ für alle } \mathbf{i}_k \in \mathcal{P}^+(\{1, \dots, n\}) = \mathcal{P}_n^+ \tag{$*$}$$

gelten, also insbesondere für alle $\mathbf{i}_2 \in \mathcal{P}_n^+$, wobei $\mathcal{P}_n^+$ Menge mit monoton geordenten Teilmengen ist. Sei also $a = \sum_{\mathbf{j}_\ell} a^{\mathbf{j}_\ell} v_{\mathbf{j}_\ell}$, dann ist $(*)$ equivalent zu

$$\sum_{\mathbf{j}_\ell \in \mathcal{P}_n^+} a^{\mathbf{j}_\ell} v_{\mathbf{i}_2} \cdot v_{\mathbf{j}_\ell} \cdot v_{\mathbf{i}_2}^{-1} = \sum_{\mathbf{j}_\ell \in \mathcal{P}_n^+} a^{\mathbf{j}_\ell} v_{\mathbf{j}_\ell}.$$

Es gilt

$$\text{(V)} \qquad v_{\mathbf{i}_k} \cdot v_{\mathbf{j}_\ell} \cdot v_{\mathbf{i}_k}^\top = (-1)^{k \cdot \ell - \sharp(\mathbf{i}_k \cap \mathbf{j}_\ell)} v_{\mathbf{j}_\ell}.$$

Da nun $v_{\mathbf{i}_2} \cdot v_{\mathbf{j}_\ell} \cdot v_{\mathbf{i}_2}^{-1} = (-1)^{\sharp(\mathbf{j}_\ell)\sharp(\mathbf{i}_2) - \sharp(\mathbf{j}_\ell \cap \mathbf{i}_2)} v_{\mathbf{i}_2} \cdot v_{\mathbf{i}_2}^{-1} \cdot v_{\mathbf{j}_\ell} = (-1)^{\sharp(\mathbf{j}_\ell \cap \mathbf{i}_2)} v_{\mathbf{j}_\ell}$, so ist

$$a^{\mathbf{j}_\ell} = (-1)^{\sharp(\mathbf{j}_\ell \cap \mathbf{i}_2)} a^{\mathbf{j}_\ell} \text{ für alle } \mathbf{i}_2 \in \mathcal{P}_n^+$$

eine notwendige Bedingung für zentrale Elemente. Daraus folgt sofort

$$a^{\mathbf{j}_\ell} = 0, \text{ falls } \mathbf{j}_\ell \neq \varnothing, \{1, \ldots, n\},$$

d.h.,

$$\mathrm{Zent}(Cl(V,q)),\ \mathrm{Zent}(Cl^{(0)}(V,q)) \subset \Bbbk \oplus \Bbbk[v_1 \cdots v_n].$$

$\dashv$ Ist $n = 2m+1$ ungerade, so liegt $v_1 \cdots v_n$ nicht in $Cl^{(0)}(V,q)$ und damit gilt

$$\mathrm{Zent}(Cl^{(0)}(V,q)) = \Bbbk.$$

Andererseits, gilt für ungerade n und $\mathbf{j}_\ell = \{1, \ldots, n\}$, also $\ell = n$

$$v_{\mathbf{i}_k} \cdot v_{\mathbf{j}_n} \cdot v_{\mathbf{i}_k}^\top = (-1)^{(2m+1) \cdot k - k} v_{\mathbf{j}_n} = v_{\mathbf{j}_n} \Rightarrow v_{\mathbf{i}_k} \cdot v_{\mathbf{j}_n} = v_{\mathbf{j}_n} \cdot v_{\mathbf{i}_k}.$$

Damit kommutiert $v_{\mathbf{j}_n} = v_1 \cdots v_n$ mit allen Elementen der Algebra $Cl(V,q)$, und es folgt

$$\mathrm{Zent}(Cl(V,q)) = \Bbbk \oplus \Bbbk[v_1 \cdots v_n].$$

$\dashv$ Ist n gerade, so ist $\sharp(\mathbf{j}_n \cap \mathbf{i}_k) = 0$ resp. $1(2)$, falls k gerade resp. ungerade ist. Damit ist also nach Vertauschungsregel (V) $\mathrm{Zent}(Cl(V,q)) = \urcorner$, sowie $\mathrm{Zent}(Cl^{(0)}(V,q)) = \Bbbk \oplus \Bbbk[v_1 \cdots v_n]$. □

Wir wollen einige zusätzliche Bezeichnungen einführen, wie z.B.

$$Cl_{r,s} := Cl(\mathbb{R}^{r,s}, \langle . , . \rangle_r^s),$$

wobei $\langle x, x \rangle_r^s = \sum_{i=1}^r (x^i)^2 - \sum_{i=r+1}^s (x^i)^2$ und insbesondere

$$Cl_n := Cl_{n,0},$$

mit euklidischem Skalarprodukt $\langle . , . \rangle$. Entsprechend erhalten wir

$$\mathbb{C}l(V,q) = Cl^{\mathbb{C}}(V,q) = Cl(V,q) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

Wir wollen uns jetzt mit der folgenden Zerlegung der Cliffordalgebra $Cl(V,q)$

$$Cl(V,q) = Cl^{(0)}(V,q) \oplus Cl^{(1)}(V,q)$$

beschäftigen, dabei ist $Cl^{(0)}(V,q) = \mathrm{Fix}_\alpha(Cl(V,q))$.

Theorem 1.4. *Es existiert ein Algebraisomorphismus*

$$Cl_{r,s} \cong Cl_{r+1,s}^{(0)}$$

für alle r, s, insbesondere gilt für alle n

$$\text{(1.4)} \qquad Cl_{n,0} = Cl_n \cong Cl_{n+1}^{(0)}.$$

Beweis. Wir werden nur die zweite Aussage beweisen, weil diese für spätere Überlegungen wichtig wird. Die allegemeine Aussage wird jedoch analog bewiesen.

Wähle eine ON–Basis $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ des $\mathbb{R}^{n+1}$. Sei dann $\mathbb{R}^n = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{e_i | \, i = 1, \ldots, n\}$ und eine Abbildung

$$\Phi \colon \mathbb{R}^n \to Cl^{(0)}_{n+1}, \text{ mit } \Phi(e_i) = e_{n+1} \cdot e_i,$$

die wir durch lineare Fortsetzung erhalten. Beachte, dass der Bildraum richtig ist, denn

$$\alpha(\Phi(e_i)) = \alpha(e_{n+1} \cdot e_i) = \alpha(e_{n+1}) \cdot \alpha(e_i) = (-1)^2 e_{n+1} \cdot e_i.$$

Für $\mathbb{R}^n \ni x = \sum_{i=1}^n x^i e_i$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \Phi(x)^2 &= \sum_{i,j=1}^n x^i x^j \cdot e_{n+1} \cdot e_i \cdot e_{n+1} \cdot e_j \\ &\overset{(\mathrm{R})}{=} \sum_{i,j=1}^n x^i \cdot x^j \cdot e_i \cdot e_j \\ &= -\langle x, x \rangle_n \cdot 1, \end{aligned}$$

denn $e_i \cdot e_j + e_j \cdot e_i = -2\delta_{ij}$ und damit

$$\sum_{1 \le i < j \le n} x^i \cdot x^j \cdot e_i \cdot e_j + \sum_{1 \le j < i \le n} x^i \cdot x^j \cdot e_i \cdot e_j = 0.$$

Aus der universellen Eigenschaft der Cliffordalgebra wissen wir, dass Φ ein eindeutiges Algebrahomomorphismus

$$\tilde{\Phi} \colon Cl_n \to Cl^{(0)}_{n+1}$$

induziert, d.h.,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "i_{\langle \cdot,\cdot \rangle_n}"] \arrow[dr, "\Phi"'] & Cl_n \arrow[d, "\exists! \tilde{\Phi}"] \\ & Cl^{(0)}_{n+1}. \end{tikzcd}$$

Sei $\mathbf{e} = e_{i_1} \cdots e_{i_k} \in Cl_n$, mit $1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n$, dann ist

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(\mathbf{e}) &= \Phi(e_{i_1}) \cdots \Phi(e_{i_k}) = e_{n+1} \cdot e_{i_1} \cdots e_{n+1} \cdot e_{i_k} \\ &\overset{(\mathrm{R})}{=} \begin{cases} (-1) e_{i_1} \cdot e_{n+1} \cdot e_{n+1} \cdot e_{i_2} \cdots (-1) e_{i_{k-1}} \cdot e_{n+1} \cdot e_{n+1} \cdot e_{i_k} \\ (-1) e_{i_1} \cdot e_{n+1} \cdot e_{n+1} \cdot e_{i_2} \cdots e_{n+1} \cdot e_{i_{k-1}} \cdot e_{n+1} \cdot e_{i_k} \end{cases} \\ &= \begin{cases} e_{i_1} \cdots e_{i_k}, & \text{falls } k = 0(2) \\ -e_{i_1} \cdots e_{i_{k-1}} \cdot e_{i_k} \cdot e_{n+1}, & \text{falls } k = 1(2) \end{cases} \end{aligned}$$

und das sind genau die Basisvektoren von $Cl^{(0)}_{n+1}$. □

1.2. **Darstellung.**

Definition 1.5. Sei $\mathbb{K} \supseteq \Bbbk$ Oberkörper von $\Bbbk$. Dann heißt $\Bbbk$–Algebra Homomorphismus

$$\rho\colon Cl(V,q) \to \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(W)$$

eine $\mathbb{K}$–Darstellung der Cliffordalgebra $Cl(V,q)$, wobei W ein endlich diminsionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist. Der Vektorraum W heißt $Cl(V,q)$–Modul über $\mathbb{K}$. Wir wollen ferner eine vereinfachte Darstellung

$$\rho(\varphi)(w) \overset{\text{def}}{=} \varphi.w$$

benutzen.

Bemerkung. In der Definition benutzter Ausdruck $\Bbbk$–Algebra Homomorphismus bedeutet, daß ρ $\Bbbk$–lineare Abbildung ist, die zusätzlich folgende Bedingung erfüllt

$$\rho(\varphi \cdot \psi) = \rho(\varphi) \circ \rho(\psi)$$

für alle $\varphi, \psi \in Cl(V,q)$. Beachte ferner, dass wir aus $\phi \cdot \psi + \psi \cdot \phi = -2b(\phi,\psi)$

$$\rho(\phi) \circ \rho(\psi) + \rho(\psi) \circ \rho(\phi) = -2b(\phi,\psi)\mathbb{1}$$

erhalten.

Wir sind an der $\mathbb{K}$–Darstellung der Clifford Algebra $Cl_{r,s}$ für $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ interessiert. Es ist zu beachten, daß ein komplexer Vektorraum ein reeller Vektorraum W ist, mit einer $\mathbb{R}$–linearen Abbildung $J\colon W \to W$, mit $J^2 = -\mathbb{1}$. Damit ist eine $\mathbb{C}$–Darstellung der Clifford Algebra $Cl_{r,s}$ eine reelle Darstellung

$$\rho\colon Cl_{r,s} \to \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(W),$$

so daß

$$\rho(\varphi) \circ J = J \circ \rho(\varphi)$$

für alle $\varphi \in Cl_{r,s}$ gilt. Denn das Bild von ρ kommutiert mit der Teilalgebra $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\mathbb{1}, J\} \cong \mathbb{C}$.

Analog verhält sich das mit der Quaterninonen Darstellung von $Cl_{r,s}$. Hier müssen wir drei $\mathbb{R}$–lineare Transformationen I, J, K auf W betrachten, mit

$$I^2 = J^2 = K^2 = -\mathbb{1}$$

$$IJ = -JI = K, \quad JK = -KJ = I, \quad KI = -IK = J.$$

Damit ist W ein $\mathbb{H}$-Modul. Eine $\mathbb{R}$–Darstellung $\rho\colon Cl_{r,s} \to \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(W)$ ist quantornionische, wenn

$$[\rho(\varphi), I] = 0, \quad [\rho(\varphi), J] = 0, \quad [\rho(\varphi), K] = 0$$

für alle $\varphi \in Cl_{r,s}$ ist.

Bemerkung 1.6. Jede komplexe Darstellung von $Cl_{r,s}$ läßt sich zu Darstellung der komplexen Cliffordalgebra $Cl^{\mathbb{C}}_{r,s} = \mathbb{C}l_{r,s}$ erweitern.

Definition 1.7. Sei $\mathbb{K} \supset \Bbbk$, V $\Bbbk$–Vektorraum und q quadratische Form auf V. Dann heißt eine $\mathbb{K}$–Darstellung $\rho\colon Cl(V,q) \to \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(W)$ *reduzibel*, wenn der Vektorraum W in direkte nicht triviale Unterräume W_1 und W_2 zerfällt, d.h.,

$$W = W_1 \oplus W_2,$$

so dass $\rho(\varphi)W_j = \varphi.W_j \subseteq W_j$ für $j = 1, 2$ und für alle $\varphi \in Cl(V, q)$. Beachte, dass in diesem Fall wir ρ wie folgt aufschreiben können

$$\rho = \rho_1 \oplus \rho_2,$$

mit $\rho_j(\varphi) = \rho(\phi)|_{W_j}$ für $j = 1, 2$. Eine Darstellung heißt *irreduzibel*, wenn sie nicht reduzibel ist.

Satz 1.8. *Jede $\mathbb{K}$–Darstellung ρ einer Cliffordalgebra $Cl(V, q)$ kann in direkte Summe*

$$\rho = \rho_1 \oplus \ldots \oplus \rho_m$$

irreduziblen Darstellungen ρ_j für $j = 1, \ldots, m$ zerlegt werden.

Beweis. Wenn ρ reduzibel ist, dann können wir diese Darstellung in $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$ zerlegen. Wenn nun entweder ρ_1 oder ρ_2 reduzibel ist, können wir ρ weiter zerlegen. Diese Zerlegung ist endlich, da $\dim_{\mathbb{K}} W < \infty$ ist. □

Weil wir nicht an einzelnen Darstellungen der Cliffordalgebra interessiert sind, sondern nur an den Äquivalenz Klassen, führen wir deshalb folgende Definition ein:

Definition 1.9. Zwei Darstellungen $\rho_j\colon Cl(V, q) \to \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(W_j)$, mit $j = 1, 2$ heißen *äquivalent*, wenn ein $F \in \mathrm{Iso}_{\mathbb{K}}(W_1, W_2)$ existiert, so dass

$$F \circ \rho_1(\varphi) = \rho_2(\varphi) \circ F_2$$

für alle $\varphi \in Cl(V, q)$ gilt.

Theorem 1.10. *Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ und betrachte den Ring $\mathbb{K}(n) = \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$ als eine Algebra über $\mathbb{R}$. Dann ist die natürliche Darstellung ρ von $\mathbb{K}(n)$ auf den Vektorraum $\mathbb{K}^n$, bis auf die Äquivalenz, die einziege irreduzible reelle Darstellung von $\mathbb{K}(n)$.*

Die Algebra $\mathbb{K}(n) \oplus \mathbb{K}(n)$ hat genau zwei Äquivalenzklassen der irreduziblen reellen Darstellungen. Diese sind durch

$$\rho_1(\phi_1, \phi_2) = \rho(\phi_1) \quad \textit{und} \quad \rho_2(\phi_1, \phi_2) = \rho(\phi_2)$$

gegeben.

2. Darstellung der Cliffordalgebra

Tabelle

n	$Cl_n = Cl_{n+1}^{(0)}$	$\mathbb{C}l_n = \mathbb{C}l_{n+1}^{(0)}$
1	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$
2	$\mathbb{H}$	$\mathbb{C}^{2\times 2}$
3	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$\mathbb{C}^{2\times 2} \oplus \mathbb{C}^{2\times 2}$
4	$\mathbb{H}^{2\times 2}$	$\mathbb{C}^{2^2\times 2^2}$
5	$\mathbb{C}^{2^2\times 2^2}$	$\mathbb{C}^{2^2\times 2^2} \oplus \mathbb{C}^{2^2\times 2^2}$
6	$\mathbb{R}^{2^3\times 2^3}$	$\mathbb{C}^{2^3\times 2^3}$
7	$\mathbb{R}^{2^3\times 2^3} \oplus \mathbb{R}^{2^3\times 2^3}$	$\mathbb{C}^{2^3\times 2^3} \oplus \mathbb{C}^{2^3\times 2^3}$
8	$\mathbb{R}^{2^4\times 2^4}$	$\mathbb{C}^{2^4\times 2^4}$

Wir haben bereits bewiesen ,dass

i) wenn $\dim_{\mathbb{R}} V = 2k$, dann ist $\mathbb{C}l(V, q) \cong \mathrm{End}(\mathbb{C}^{2^k})$ und

ii) wenn $\dim_{\mathbb{R}} V = 2k+1$, dann ist $\mathbb{C}l(V,q) \cong \mathrm{End}(\mathbb{C}^{2^k}) \oplus \mathrm{End}(\mathbb{C}^{2^k})$.

Jetzt wollen wir eine zusätzliche Struktur in der Darstellugn bestimmen.

Definition 2.1. Sei $(e_1, \dots, e_n)$ ON^+–Basis des $\mathbb{R}^n$. Dann ist

$$\omega = e_1 \cdots e_n \in \mathbb{R}[e_1 \cdots e_n] \subset Cl_n$$

der *assoziierte Volumenelement.* Wir definieren das entsprechende komplexe Volumenelement $\omega_{\mathbb{C}} \in \mathbb{C}l_n$ durch

$$\omega_{\mathbb{C}} = \begin{cases} \mathbb{i}^{\,m} e_1 \cdots e_n, & \text{falls } n = 0(2), \quad n = 2m \\ \mathbb{i}^{\,\frac{n+1}{2}} e_1 \cdots e_n, & \text{falls } n = 1(2). \end{cases}$$

Man nennt $\omega_{\mathbb{C}}$ auch *Chiralitäts–Operator.*

Lemma. *Der Volumenelement ω und damit auch $\omega_{\mathbb{C}}$ sind unabhängig von der gewählten Basis, d.h., die Definition ist korrekt.*

Beweis. Sei dazu $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n)$ eine weitere ON^+–Basis des $\mathbb{R}^n$, dann ist

$$\hat{e}_j = A^i_j e_i,$$

wobei $A := (A^i_j) \in SO(n)$ und nach der Multiplikationsregel,

$$e_i e_j + e_i e_j = -2\delta_{ij}, \tag{R}$$

$$\begin{aligned} \hat{e}_1 \cdots \hat{e}_n &= A^{i_1}_1 e_{i_1} \cdots A^{i_n}_n e_{i_n} \\ &= \det(A) e_1 \cdots e_n = e_1 \cdots e_n. \end{aligned}$$

Zu besserem Verständnis betrachten wir den Fall $n = 2$, dann ist

$$\begin{aligned} \hat{e}_1 &= \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2 \\ \hat{e}_2 &= -\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2, \end{aligned}$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

ist. Dann ist

$$\begin{aligned} \hat{e}_1 \hat{e}_2 &= -\sin\theta\cos\theta e_1 e_1 + \sin\theta\cos\theta e_2 e_2 + \cos^2\theta e_1 e_2 - \sin^2\theta e_2 e_1 \\ &\overset{(R)}{=} e_1 e_2, \end{aligned}$$

$\square$

Satz 2.2. *Für das Volumenelement ω gilt*

1)

$$\omega^2 = (-1)^{\binom{n+1}{2}}, \tag{2.1}$$

2)

$$v \cdot \omega = (-1)^{n-1} \omega \cdot v \text{ für alle } v \in V, \tag{2.2}$$

d.h.,

$$\begin{aligned} &n = 1(2) \Rightarrow \omega \in \mathrm{Zent}(Cl_n) \\ &n = 0(2) \Rightarrow \varphi\omega = \omega\alpha(\varphi) \text{ für alle } \varphi \in i_{\langle \cdot,\cdot \rangle}(\mathbb{R}^n) \subset Cl_n. \end{aligned}$$

Für das komplexe Volumenelement $\omega_{\mathbb{C}}$ gilt

1)$_{\mathbb{C}}$ Für alle n gilt

$$(\omega_{\mathbb{C}})^2 = 1. \tag{2.3}$$

2)$_{\mathbb{C}}$ Für $n = 1(2)$ ist $\omega_{\mathbb{C}} \in \mathrm{Zent}(\mathbb{C}l_n) = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}[e_1 \cdots e_n]$.

Bemerkung. Wir können die Beziehung (2.1) auch wie folgt aufschreiben

$$\omega^2 = \begin{cases} +1 & , \text{ falls } n = 3 \text{ oder } 4(4) \\ -1 & , \text{ falls } n = 1 \text{ oder } 2(4). \end{cases}$$

Beweis. Sei $(e_1, \ldots, e_n)$ ON^+–Basis des $\mathbb{R}^n$.

1) Dann ist $\omega = e_1 \cdots e_n$ und

$$\begin{aligned} \omega^2 &= (e_1 \cdots e_n) \cdot (e_1 \cdots e_n) = e_1 \cdots e_n \cdot (e_n \cdots e_1)^\top \\ &\overset{(1.3)}{=} (-1)^{\binom{n}{2}} e_1 \cdots e_n \cdot e_n \cdots e_1 \\ &\overset{(\mathrm{R})}{=} (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}} (-1)^n = (-1)^{\frac{(n+1)n}{2}}. \end{aligned}$$

2) Weil $(e_1, \ldots, e_n)$ Basis des $\mathbb{R}^n$ ist, ist $v = v^j e_j$. Damit reicht es die Beziehung für Basisvektoren zu beweisen, sei dazu $e_j \in (e_1, \ldots, e_n)$, dann ist nach (R)

$$\begin{aligned} e_j \cdot e_1 \cdots e_n &= (-1) e_1 \cdot e_j \cdot e_2 \cdots e_n = (-1)^j e_1 \cdots e_j \cdot e_j \cdots e_n \\ &= (-1)^{j+(n-j)-1} e_1 \cdots e_n \cdot e_j. \end{aligned}$$

1)$_{\mathbb{C}}$ Wir wissen, dass

$$\omega^2 = \begin{cases} +1, & n = 3 \text{ oder } 4(4) \\ -1, & n = 1 \text{ oder } 2(4). \end{cases}$$

Sei $n = 1(2)$, dann ist $(\omega_{\mathbb{C}})^2 = \mathrm{i}^{\,n+1} \omega^2$ und damit

$$(\omega_{\mathbb{C}})^2 = 1 = \begin{cases} \mathrm{i}^{\,4k+2}(-1), & n = 1(4) \\ \mathrm{i}^{\,4k+4}(+1), & n = 3(4). \end{cases}$$

Für $n = 2m = 0(2)$ ist $(\omega_{\mathbb{C}})^2 = \mathrm{i}^{\,2m} \omega^2$ und damit

$$(\omega_{\mathbb{C}})^2 = 1 = \begin{cases} \mathrm{i}^{\,4k+2}(-1), & n = 2(4) \\ \mathrm{i}^{\,4k}(+1), & n = 0(4). \end{cases}$$

2)$_{\mathbb{C}}$ Folgt unmittelbar aus 2); oder allgemeiner aus Satz 1.3 für ungerade n. □

Lemma 2.3. *Sei ω das Volumennelement auf Cl_n, mit $\omega^2 = 1$ und seien ferner*

$$\pi^+ := \tfrac{1}{2}(1 + \omega) \quad \text{und} \quad \pi^- := \tfrac{1}{2}(1 - \omega).$$

Dann gilt für $\pi^\pm$:

$$\pi^+ + \pi^- = 1, \tag{2.4}$$

$$(\pi^+)^2 = \pi^+ \quad \text{und} \quad (\pi^-)^2 = \pi^-, \tag{2.5}$$

$$\pi^+ \cdot \pi^- = \pi^- \cdot \pi^+ = 0. \tag{2.6}$$

Sei $\omega_{\mathbb{C}}$ komplexes Volumenelement auf $\mathbb{C}l_n$, dann gelten für

$$\pi^+_{\mathbb{C}} := \tfrac{1}{2}(1+\omega_{\mathbb{C}}) \quad \textit{und} \quad \pi^-_{\mathbb{C}} := \tfrac{1}{2}(1-\omega_{\mathbb{C}})$$

entsprechende Aussagen:

$$\pi^+_{\mathbb{C}} + \pi^-_{\mathbb{C}} = 1, \tag{2.5$_{\mathbb{C}}$}$$

$$(\pi^+_{\mathbb{C}})^2 = \pi^+_{\mathbb{C}} \quad \textit{und} \quad (\pi^-_{\mathbb{C}})^2 = \pi^-_{\mathbb{C}}, \tag{2.6$_{\mathbb{C}}$}$$

$$\pi^+_{\mathbb{C}} \cdot \pi^-_{\mathbb{C}} = \pi^-_{\mathbb{C}} \cdot \pi^+_{\mathbb{C}} = 0. \tag{2.7$_{\mathbb{C}}$}$$

Beweis. Die erste Aussage ist trivial; die restlichen folgen unmittelbar aus der Voraussetzung $\omega^2 = 1$. So ist z.B.

$$(\pi^+)^2 = \tfrac{1}{4}(1 + 2\omega + \omega^2) = \pi^+.$$

□

Daraus folgen triviale jedoch wichtige Aussagen:

Satz 2.4. *Sei ω das Volumenelement auf Cl_n, mit $\omega^2 = 1$ und $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$ ungerade, d.h., nach der obigen Bemerkung $n = 3(4)$. Dann kann man Cl_n in direkte Summe zwei isomorpher Unteralgebren Cl_n^+, Cl_n^- zerlegen, d.h.,*

$$Cl_n = Cl_n^+ \oplus Cl_n^-, \tag{2.7}$$

wobei $Cl_n^{\pm} = \pi^{\pm} \cdot Cl_n = Cl_n \cdot \pi^{\pm}$ und $\alpha(Cl_n^{\pm}) = Cl_n^{\mp}$ ist.

Für ungerade n gilt die entsprechende Aussage für die $\mathbb{C}l_n$:

$$\mathbb{C}l_n = \mathbb{C}l_n^+ \oplus \mathbb{C}l_n^-, \tag{2.8}$$

wobei

$$\mathbb{C}l_n^{\pm} = \pi^{\pm}_{\mathbb{C}} \cdot \mathbb{C}l_n. \tag{2.9}$$

Beweis. Weil n ungerade ist, wissen wir nach Satz 2.2, dass $\omega \in \mathbb{R}[e_1 \cdots e_n] \subset \mathrm{Zent}(Cl_n) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}[e_1 \cdots e_n]$. Damit sind auch π^+ und π^- Elemente des Zentrums von Cl_n und die Zerlegung (2.7) in Ideale folgt unmittelbar aus (2.4),(2.5) und (2.6). Weil ω ein ungerades Element ist, d.h., $\deg \omega = n$, ist

$$\alpha(\pi^{\pm}) = \pi^{\mp}$$

und damit $\alpha(Cl_n^{\pm}) = Cl_n^{\mp}$. Weil ferner α ein Automorphismus ist, sind die Ideale $Cl_n^{\pm}$ isomorph zueinander. Der komplexe Fall wird analog bewiesen □

Bemerkung. 1) Es wird auch sofort klar warum diese Zerlegung für gerade n nicht finktioniert: Für gerade n liegt ω, bzw. $\omega_{\mathbb{C}}$ *nicht* im Zentrum von Cl_n, bzw. $\mathbb{C}l_n$, d.h., die oben angegebene $Cl_n^{\pm}$, bzw. $\mathbb{C}l_n^{\pm}$ sind nicht definiert.

2) Die Teilalgebra $Cl_n^{(0)}$, bzw $\mathbb{C}l_n^{(0)}$ liegt diagonal in der Zerlegung (2.8), bzw. (2.9), d.h.,

$$Cl_n^{(0)} \overset{\text{def}}{=\!=} \{\phi \in Cl_n \,|\, \alpha(\phi) = \phi\} = X = \{(\varphi, \alpha(\varphi)) \in Cl_n^+ \oplus Cl_n^- \,|\, \varphi \in Cl_n^+\}.$$

In der Tat sei $(\varphi, \alpha\varphi) \in X$ mit $\deg \varphi = k$, also $\varphi \in Cl_n^{[k]}$, dann ist $\alpha(\varphi \cdot \alpha(\varphi)) = \alpha(\varphi) \cdot \varphi = (-1)^k \varphi \cdot \varphi = \varphi \cdot (-1)^k \varphi = \varphi \cdot \alpha(\varphi)$.

Satz 2.5. *Sei $\rho\colon Cl_n \to \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(W)$ eine irreduzible $\mathbb{R}$–Darstellung, mit $n = 3 + 4m$. Dann ist entweder*

$$\rho(\omega) = \mathbb{1} \quad \textit{oder} \quad \rho(\omega) = -\mathbb{1}.$$

Beide Möglichkeiten können auftreten, und die entsprechenden Darstellungen sind nicht äquivalent.

Analoge Aussage gilt auch für $\mathbb{C}l_n$, wenn n ungerade ist.

Beweis. Weil $\omega^2 = 1$ und $\rho(1) = \mathbb{1}$ ist $\rho(\omega^2) = \rho(\omega)^2 = \mathbb{1}$ und deshalb können wir W in W^+ und W^- direkt zerlegen, also $W = W^+ \oplus W^-$, wobei $W^\pm$ Eigenräume von $\rho(\omega)$ zu Eigenwerten ± 1 sind. Weil $\omega \in \mathrm{Zent}(Cl_n)$ ist, gilt $\varphi \cdot \omega = \omega \cdot \varphi$ für alle $\varphi \in Cl_n$, und damit sind $W^\pm$ Cl_n–invariant, denn

$$\rho(\varphi) \circ \rho(\omega) = \rho(\omega) \circ \rho(\varphi).$$

Weil die Darstellung ρ irreduzibel nach Voraussetzung ist, ist entweder $W = W^+$ oder $W = W^-$.

Um die nicht Äquivalenz der beiden Darstellungen ρ_+ und ρ_-, mit $\rho_\pm(\omega) = \pm\mathbb{1}$ zu beweisen, sei $F \in \mathrm{Aut}(W)$ und $\rho(\omega) = \lambda\mathbb{1}$, mit $\lambda \in \{-1, +1\}$, dann ist $F \circ \rho(\omega) \circ F^{-1} = \lambda\mathbb{1}$ und nicht $-\lambda\mathbb{1}$ wie nach der Definition der Äquivalenz der Darstellungen nötig wäre. □

Satz 2.6. *Sei ω das Volumenelement auf Cl_n, mit $\omega^2 = 1$ und $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$ gerade, d.h., nach der obigen Bemerkung $n = 0(4)$. Sei ferner W ein Cl_n–Modul, d.h., W ist ein $\mathbb{R}$–Vektorraum mit einem Algebrahomomorphismus*

$$Cl_n \xrightarrow{\rho} \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(W).$$

Dann existiert eine Zerlegung

$$W = W^+ \oplus W^-, \tag{2.10}$$

wobei $W^\pm$ Eigenräume zu Eigenwerten $+1$ und -1 bezüglich Multiplikation mit ω sind, d.h., $W^\pm = \{w \in W \,|\, \rho(\omega)w = \pm w\}$. Es gilt

$$W^+ = \pi^+.W \quad \textit{und} \quad W^- = \pi^-.W,$$

und für alle $v \in \mathbb{R}^n$ mit $q(v) \neq 0$ ist $\rho(v)$ ein Automorphsmus von W der Form

$$\rho(v)\colon W^+ \to W^- \quad \textit{und} \quad \rho(v)\colon W^- \to W^+. \tag{2.11}$$

Die linearen Teilräume $W^\pm$ sind invariant unter der Multiplikation mit $Cl_n^{(0)}$, d.h., für $\varphi \in Cl_n^{(0)}$ gilt

$$\rho(\varphi)\colon W^\pm \to W^\pm.$$

Also ist insbesondere $\dim_{\mathbb{R}} W^+ = \dim_{\mathbb{R}} W^-$.

Nach Theorem 1.4 ist $Cl_n^{(0)} \cong Cl_{n-1}$, und deshalb entsprechen diese Räume $W^\pm$ zwei verschiedenen irreduziblen $\mathbb{R}$–Darstellungen von Cl_{n-1}.

Entsprechende Aussagen gelten für $\mathbb{C}l_n$ für gerade n.

Bemerkung. Die Beziehung (2.11) können wir in folgender Form aufschreiben

$$\rho\colon \mathbb{R}^n \setminus \{o\} \otimes W^\pm \to W^\mp.$$

Beweis. Die Zerlegung ist unmittelbare Folgerung aus (2.4),(2.5) und (2.6) und der Tatsache, dass für $\rho\colon Cl_n \to \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(W)$

$$\rho(\phi \cdot \psi) = \rho(\phi) \circ \rho(\psi) \text{ für alle } \phi, \psi \in Cl_n$$

und damit $\rho(\omega^2) = \rho(1) = \mathbb{1}$ gilt, d.h. für $w \in W$ gilt $\rho(\omega^2)w = \rho^2(\omega)w = \omega^2.w = w$ und $\pi^\pm.w =: w^\pm \in W^\pm$. Die Eigenwerte lassen sich durch

$$\omega \cdot \pi^\pm = \tfrac{1}{2}\omega \cdot (1 \pm \omega) = \pm\tfrac{1}{2}(1 \pm \omega) = \pm\pi^\pm$$

bestimmen.
Die Aussage (2.11) folgt aus

$$\begin{aligned} v \cdot \pi^+ &= \tfrac{1}{2}v \cdot (1 + \omega) \overset{(2.2)}{=} \tfrac{1}{2}(1 - \omega) \cdot v = \pi^- \cdot v, \\ v \cdot \pi^- &= \tfrac{1}{2}v \cdot (1 - \omega) \overset{(2.2)}{=} \tfrac{1}{2}(1 + \omega) \cdot v = \pi^+ \cdot v \end{aligned}$$

und $v \cdot v = -q(v) \cdot 1 \Rightarrow \rho(v) = -q(v)\mathbb{1} \neq o$.

Weil für gerade n $\omega \in \mathrm{Zent}(Cl_n^{(0)})$, d.h., $\omega \cdot \psi = \psi \cdot \omega$ für alle $\psi \in Cl_n^{(0)}$, so gilt auch

$$\rho(\omega) \circ \rho(\psi) = \rho(\psi) \circ \rho(\omega)$$

und damit sind $W^\pm$ invariant unter $Cl_n^{(0)}$. Unter Benutzung des Isomorphismus $\Phi\colon Cl_{n-1} \to Cl_n^{(0)}$ aus dem Theorem 1.4 transformiert sich das Volumenelment $\omega' = e_1 \cdots e_{n-1}$ von Cl_{n-1} zum Volumenelement $\omega \in Cl_n^{(0)}$. Um dies zu sehen betrachten wir

$$\begin{aligned} (e_1 \cdot e_n) \cdots (e_{n-1} \cdot e_n) &= (-1)^{\binom{n-1}{2}} e_1 \cdots e_{n-1} \cdot (e_n)^{n-1} \\ &= e_1 \cdots e_n, \end{aligned}$$

denn für $n = 4m$ $(e_n)^{4m-1} = (e_n)^{4(m-1)+3} = (e_n)^3 = -e_n$, weil $(e_n)^4 = 1$ und damit $(-1)^{\binom{n-1}{2}} \cdot (-1) = 1$, dazu

$$\tfrac{(4m-1)(4m-2)}{2} + 1 = (4m-1)(2m-1) + 1 = 0(2).$$

Daraus folgt, dass $\rho(\omega') = \mathbb{1}$ auf W^+ und $\rho(\omega') = -\mathbb{1}$ auf W^-. Nun ist $n - 1 = 4m - 3$ und damit sind, nach Satz 2.5, diese Darstellungen von Cl_{n-1} nicht äquivalent.

Der komplexe Fall wird analog bewiesen. □

2.1. *Spin*–**Darstellung.** Sei $Cl^\times(V, q)$ multiplikative Gruppe aller invertierbarer Elemente aus $Cl(V, q)$, d.h.,

$$Cl^\times(V, q) = \{v \in Cl(V, q) \mid \exists\, v^{-1} \in Cl(V, q) : v \cdot v^{-1} = 1\}.$$

Beachte, dass *Spin*–Gruppe

$$Spin(n) \subset Cl_n^{(0)} \subset Cl_n,$$

denn $Spin(n) = Pin(n) \cap Cl_n^{(0)}$ und $Pin_n \subset Cl_n^\times$.

Definition 2.7. Die *reelle Spin–Darstellung* von $Spin(n)$ ist der Homomorphismus

$$\Delta_n\colon Spin(n) \to \mathrm{Aut}(S),$$

der durch Einschränkung einer irreduziblen reellen Darstellung $\rho_n\colon Cl_n \to \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(S)$ auf $Spin(n) \subset Cl_n^{(0)} \subset Cl_n$ definiert ist.

Bemerkung. Es sit klar, dass die Darstellung in die multiplikative Untergruppe $\mathrm{Aut}(S)$ der $\mathrm{End}(S)$ abbildet, denn für $v \in Spin(n)$ existiert ein v^{-1} und damit ist auch das Inverse von $\Delta_n(v)$, d.h., $\Delta_n(v^{-1}) = \Delta_n(v)^{-1}$.

Satz 2.8. *Wenn $n = 3(4)$ ist, ist die Definition von Δ_n unabhängig von der Wahl der irreduziblen Darstellung von Cl_n.*
Für $n \neq 0(4)$ ist die Darstellung Δ_n entweder irreduzlibel oder ist Summe von zwei äquivalenten irreduziblen Darstellungen. (der zweite Fall tritt genau für $n = 1$ oder $2(8)$ auf)
Im verbleibenden Fällen existiert eine Zerlegung

$$\Delta_{4m} = \Delta_{4m}^{+} \oplus \Delta_{4m}^{-},$$

wobei Δ_{4m}^{+} und Δ_{4m}^{-} nicht äquivalente irreduzible Darstellungen von $Spin(4m)$ sind.

Beweis. Weil für $n = 3(4)$ die Involution $\alpha\colon Cl_n \to Cl_n$ die Unteralgebren $Cl_n^{\pm}$ vertauscht und

$$Cl_n = Cl_n^{+} \oplus Cl_n^{-} \tag{2.12}$$

ist, gilt

$$Cl_n^{(0)} = \{(\varphi, \alpha(\varphi)) \in Cl_n^{+} \oplus Cl_n^{-} \,|\, \varphi \in Cl_n^{+}\},$$

d.h., liegt diagonal in der Zerlegung (2.12). Die beiden irreduziblen Darstellungen von Cl_n unterscheiden sich durch die Multiplikation mit dem Automorphismus α, und sind äquivalent wenn man diese auf $Cl_n^{(0)} \supset Spin(n)$ einschränkt.
Aus der Tabelle ist es sofort ersichtlich, dass Einschränkung einer irreduziblen Darstellung von Cl_n auf $Cl_n^{(0)} \cong Cl_{n-1}$ eine irreduzible Darstellung für $n = 3, 5, 6$ oder $7(8)$ ergibt.
Wenn $n = 0(8)$ ist, so wissen wir nach dem Satz 2.6, dass die Einschränkung auf $Cl_n^{(0)}$ sich in zwei nicht äquivalente irreduzible Darstellungen aufspaltet. Nun ergibt die Einschränkung eines irreduziblen $Cl_n^{(0)}$–Moduls auf $Spin(n)$ eine irreduzible Darstellung, da $Spin(n) \subset Cl_n^{(0)}$. □

Definition 2.9. Die *komplexe Spin–Darstellung* von $Spin(n)$ ist der Homomorphismus

$$\Delta_n^{\mathbb{C}}\colon Spin(n) \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(S),$$

der durch Einschränkung einer irreduziblen Darstellung $\mathbb{C}l_n \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(S)$ auf $Spin(n) \subset \mathbb{C}l_n^{(0)} \subset \mathbb{C}l_n$.

Wir können nun die komplexe Version des Satzes 2.8 beweisen. Der Beweis des Satzes wird analog geführt.

Satz 2.10. *Wenn n ungerade ist, ist die Definition von $\Delta_n^{\mathbb{C}}$ unabhängig von der Wahl der irreduziblen Darstellung von $\mathbb{C}l_n$. Weiterhin, wenn n ungerade ist, ist die Darstellung $\Delta_n^{\mathbb{C}}$ irreduzibel. Wenn n gerade ist, so existiert eine Zerlegung*

$$\Delta_{2m}^{\mathbb{C}} = \Delta_{2m}^{\mathbb{C}\,+} \oplus \Delta_{2m}^{\mathbb{C}\,-}$$

in eine direkte Summe von zwei nicht äquivalenten irreduziblen komplexen Darstellungen von Spin(n)*.*

Wir wollen uns zuerst die komplexe Version des Satzes 2.6 ansehen.
Sei dazu $W_{2m} = W_{2m+1} = \mathbb{C}^{2^m}$ und damit ist $\mathbb{C}l(V,q) \cong \mathrm{End}(W_{2m}$, falls $\dim V = 2m$ und $\mathbb{C}l(V,q) = \mathrm{End}(W_{2m+1}) \oplus \mathrm{End}(W_{2m+1})$, falls $\dim V = 2m+1$.

Satz (Satz $2.6_{\mathbb{C}}$)**.** *Sei* $\omega_{\mathbb{C}}$ *das Volumenelement auf* $\mathbb{C}l_n$*, mit* $n = 2m$ *und* $\mathbb{C}$*–Algebrahomomorphismus*

$$\rho_{2m}\colon \mathbb{C}l_{2m} \xrightarrow{\cong} \mathrm{End}(W_{2m}).$$

Dann existiert eine Zerlegung

$$W_{2m} = W_{2m}^+ \oplus W_{2m}^-,$$

wobei $W_{2m}^{\pm} = \{w \in W_{2m} | \, \omega.w = \pm w\}$*. Ferner sind* $W_{2m}^{\pm} = \pi_{\mathbb{C}}.W_{2m}$ *und*

$$\mathbb{R}^{2m} \setminus \{o\} \otimes_{\mathbb{R}} W_{2m}^{\pm} \to W_{2m}^{\mp}$$

sowie für $\varphi \in \mathbb{C}l^{(0)}$ $\rho_{2m}(\varphi)\colon W_{2m}^{\pm} \to W_{2m}^{\pm}$*. Weil* $\mathbb{C}l_{2m}^{(0)} \cong \mathbb{C}l_{2m-1}$*, sind* $W_{2m}^{\pm}$ *zwei nicht äquivalente* $\mathbb{C}l_{2m-1}$*–Module.*

Beweis. Für n ungerade, d.h., $n = 2m+1$ für ein $m \in \mathbb{N}_0$, ist $\mathbb{C}l_{2m+1}^{(0)} \cong \mathbb{C}l_{2m}$ nach Theorem 1.4 und nach Satz 2.4

$$\mathbb{C}l_{2m+1} = \mathbb{C}l_{2m+1}^+ \oplus \mathbb{C}l_{2m+1}^-.$$

Ferner liegt $\mathbb{C}l_{2m+1}^{(0)}$ diagonal in dieser Zerlegung von $\mathbb{C}l_{2m+1}$, d.h.,

$$\mathbb{C}l_{2m+1}^{(0)} = \{(\varphi, \alpha(\varphi)) \in \mathbb{C}l_{2m+1}^+ \oplus \mathbb{C}l_{2m+1}^- | \, \varphi \in \mathbb{C}l_{2m+1}^+\}.$$

Die beiden irreduziblen Darstellungen von $\mathbb{C}l_{2m+1} = \mathrm{End}(\mathbb{C}^{2^m}) \oplus \mathrm{End}(\mathbb{C}^{2^m})$ unterscheiden sich durch die Multiplikation mit dem Automorphismus α und sind äquivalent wenn man sie auf *Spin*$(n) \subset \mathbb{C}l_n^{(0)}$ einschränkt.
Wenn n gerade ist, d.h. $n = 2m$, so wissen wir nach Satz 2.6, dass die Einschränkung der Darstellung auf $\mathbb{C}l_{2m}^{(0)}$ sich in zwei nicht äquivalente irreduzible Darstellungen aufspaltet. Nun ergibt die Einschränkung eines irreduziblen $\mathbb{C}l_{2m}^{(0)}$–Moduls auf *Spin*$(2m) \subset \mathbb{C}l_{2m}^{(0)}$ eine irreduzible Darstellung. □

3. Äussere Algebra und Spinoren

Sei V ein n–diminsionaler euklidischer Vektorraum mit $(e_1, \dots, e_n)$ ON^+–Basis von V. Wir definieren nun

$$\epsilon\colon V \times \Lambda^k V \to \Lambda^{k+1} V, \quad \epsilon(v)(v_1 \wedge \ldots \wedge v_k) = \wedge_v(v_1 \wedge \ldots \wedge v_k) = v \wedge v_1 \wedge \ldots \wedge v_k$$

und den dazu adjungierten Operation

$$\iota\colon V^* \times \Lambda^{k+1} V \to \Lambda^k V, \; \iota(v^*)(v_1 \wedge \ldots \wedge v_{k+1}) = (v_1 \wedge \ldots \wedge v_{k+1}) \lrcorner v.$$

Wir definieren $\iota_v\colon \Lambda^k V \to \Lambda^{k-1} V$ mit $v \in V$ durch $\iota(\mathrm{b}(v))$, wobei $\mathrm{b}\colon V \to V^*$ mit $b(v,w) = \mathrm{b}(v)(w)$.

Sei Ψ eine lineare Abbildung von V nach $\mathrm{End}(\Lambda V)$ definiert durch

$$\Psi(v) = \wedge_v - \iota_v.$$

Weil $\wedge_i \iota_j + \iota_j \wedge_i = \delta_{ij}$ ist, wobei $\wedge_i = \wedge_{e_j}$ und $\iota_j = \iota_{e_j}$, erhalten wir

$$(\Psi(v))^2 = -(\iota_v \wedge_v + \wedge_v \iota_v) = -\mathbb{1}$$

und damit nach der Universellen Eigenschaft eine fortsetzung der Abbildung Ψ zu

$$\Psi\colon Cl(V,q) \to \mathrm{End}(\Lambda V),$$

mit $\wedge_i \wedge_j = - \wedge_j \wedge_i$ und $\iota_i \iota_j = -\iota_j \iota_i$ erhalten wir

$$\Psi(v)\Psi(w) + \Psi(w)\Psi(v) = -2b(v,w)\mathbb{1},$$

d.h., Algebrahomomorphismus.

Wir definieren nun eine lineare Abbildung

$$\tilde{\Psi}\colon Cl(V,q) \to \Lambda V, \quad \tilde{\Psi}(v) = \Psi(v)(1)$$

für $w \in Cl(V,q)$ und $1 \in \Lambda V$. Beachte, dass für $v \in V \subset Cl(V,q)$

$$\tilde{\Psi}(v) = \Psi(v)(1) = (\wedge_v - \iota_v)(1) = \wedge_v(1) - \underbrace{\iota_v(1)}_{\overset{\mathrm{def}}{=} o} = v.$$

Damit ist für ein $w = e_1^{j_1} \cdots e_n^{j_n} \in Cl^{[k]}(V,q)$

$$\tilde{\Psi}(e_1^{j_1} \cdots e_n^{j_n}) - e_1^{j_1} \wedge \ldots \wedge e_n^{j_n} = 0,$$

weil $\iota_i e_j = b(e_i, e_j) = 0$, d.h., $(e_1, \ldots, e_n)$ ON–Basis ist. Allgemeiner erhält man für $\{v_1, \ldots, v_n\}$ Basis von V

$$\tilde{\Psi}(v_1^{j_1} \cdots v_n^{j_n}) - v_1^{j_1} \wedge \ldots \wedge v_n^{j_n} \in \Lambda^{k-1} V.$$

Bemerkung. Mit $\tilde{\Psi}\colon Cl(V,q) \to \Lambda V$ wird ein Isomorphsimus zwischen den Vektorräumen beschrieben. Beachte, dass

$$Cl(V,0) = \Lambda V$$

nach Definition.

Wir wollen nun $\mathbb{C}l_{2m} \cong \mathrm{End}(\mathbb{C}^{2^m})$ Modul genauer untersuchen. Sei dazu V ein n–diminsionaler reelle Vektorraum, mit $n = 2m$ und $\langle .\,,.\rangle$, also ist im wesentlichen $V \cong \mathbb{R}^{2m}$ euklidisch.

Sei $e_1, \ldots, e_{2m}$ ON$^+$–Basis von V und J komplexe Struktur auf V, d.h., $J^2 = -\mathrm{id}_V$, die zusätzlich Isomotrie bezüglich b ist, d.h., $b(v,w) = b(Jv, Jw)$ für alle $v, w \in V$. Daraus folgt

$$b(v, Jw) = -b(Jv, w).$$

Sei $V^{\mathbb{C}}$ mit $\dim_{\mathbb{C}}(V^{\mathbb{C}}) = k$ Komplexifizierung von V mit J. Dann definieren wir auf $V^{\mathbb{C}}$ folgende hermitsche Form

$$\langle v, \hat{v} \rangle_{\mathbb{C}} = \langle v, \hat{v} \rangle + \mathbb{i}\, \langle v, J\hat{v} \rangle,$$

dabei ist $(a + \mathbb{i}\, b)v = a\mathbb{1}_V(v) + bJ(v)$.

Wir erhalten die äußere Algebra von $V^{\mathbb{C}}$

$$\Lambda_{\mathbb{C}} V^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{j=0}^{m} \Lambda_{\mathbb{C}}^{j} V^{\mathbb{C}}.$$

Für $v \in V^{\mathbb{C}}$ erhalten wir das äußere Produkt $\wedge_v \colon \Lambda^j_{\mathbb{C}} V^{\mathbb{C}} \to \Lambda^{j+1}_{\mathbb{C}} V^{\mathbb{C}}$ und den dazu adjungierten Operator bezüglich $\langle . , . \rangle_{\mathbb{C}}$ (das innere Produkt)

$$\iota^c_v \colon \Lambda^{j+1}_{\mathbb{C}} V^{\mathbb{C}} \to \Lambda^j_{\mathbb{C}} V^{\mathbb{C}}.$$

Sei

$$\psi(v)(\varphi) = v \wedge \varphi - \iota^c_v \varphi \quad \text{für } v \in V^{\mathbb{C}},\ \varphi \in \Lambda_{\mathbb{C}} V^{\mathbb{C}}.$$

Beachte, dass $v \wedge \varphi$ in v $\mathbb{C}$–linear ist und ι^c_v ist konjugiert linear in v, denn $\langle v, J\hat{v} \rangle_{\mathbb{C}} = \langle v, J\hat{v} \rangle + \mathbb{i} \langle v, J^2 \hat{v} \rangle = \langle v, J\hat{v} \rangle - \mathbb{i} \langle v, \hat{v} \rangle$, und damit ist $\psi(v)$ nur $\mathbb{R}$–linear in v. Wir erhalten

$$\psi(u)\psi(v) + \psi(v)\psi(u) = -2\langle u, v \rangle \mathbb{1} \tag{3.1}$$

und damit kann wie oben $\psi \colon V \to \mathrm{End}(\Lambda_{\mathbb{C}} V^{\mathbb{C}})$ zu einem Algebrahomomorphismus fortgesetzt werden

$$\psi \colon \mathit{Cl}(V, q) = \mathrm{End}(\Lambda_{\mathbb{C}} V^{\mathbb{C}})$$

und damit auch zu einem $\mathbb{C}$–Algebrahomomorphsimus

$$\psi \colon \mathbb{C}l(V, q) \to \mathrm{End}(\Lambda_{\mathbb{C}} V^{\mathbb{C}}). \tag{3.2}$$

Satz 3.1. *Der Homomorphismus $\psi \colon \mathbb{C}l(V, q) \to \mathrm{End}(\Lambda_{\mathbb{C}} V^{\mathbb{C}})$ ist für reelle Vektorräume V der geraden Diminsion $2m$ ein Isomorphismus.*

Beweis. Wir wissen bereits, dass

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}l(V,q) \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "\cong", "f"'] & \mathrm{End}(\Lambda_{\mathbb{C}} V^{\mathbb{C}}) \arrow[d, equal] \\ & \mathrm{End}(\mathbb{C}^{2^m}) \end{tikzcd}$$

Ferner wollen wir benutzen, dass $\mathrm{End}(\mathbb{C}^{2^m})$ keinen Hauptideal hat $(*)$.

Nun ist aber $\mathfrak{a} = \ker(\psi)$ ein Hauptideal, denn für $x \in \ker(\psi)$ und $v \in \mathbb{C}l(V, q)$ folgt aus

$$\psi(x \cdot v) = \psi(x) \circ \psi(v) = 0 \circ \psi(v) = 0,$$

dass $x \cdot v$ und analog auch $v \cdot x$ aus dem Urbild von $0 \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^{2^k})$ sind. Dann ist nach $(*)$ $f(\mathfrak{a})$ entweder Nullideal oder Einsideal. Also ist entweder $\psi \equiv 0$ oder ψ ein Isomorphsimus. Nun ist aber für $v \in V$, $\psi(v)(1) = v$, also ist $\psi \neq 0$. Deshalb ist ψ ein Isomorphismus. $\square$

Wir wollen uns jetzt an die *Spin*–Darstellung beschäftigen. Sei V $2m$ diminsionaler reeller Vektorraum mit komplexer Struktur J. Sei $V^{\mathbb{C}}$ Komplexefizierung von V bezüglich J, mit $\dim_{\mathbb{C}} V^{\mathbb{C}} = m$ und sei

$$S = S(V, q, J) = \Lambda_{\mathbb{C}} V^{\mathbb{C}}$$

mit dem induziertem hermitischem Produkt. Aus der Inklusionskette

$$\mathit{Pin}(V, q) \subset \mathit{Cl}(V, q) \subset \mathbb{C}l(V, q)$$

und mit der Einschränkung von ψ aus (3.2) auf $\mathit{Pin}(V, q)$ erhalten wir

$$\rho \colon \mathit{Pin}(V, q) \to \mathrm{Aut}(S).$$

Satz 3.2. *Die Darstellung ρ von $\mathit{Pin}(V, q)$ ist irreduzibel und unitär.*

Beweis. Die $\mathbb{C}$–Teilalgebra von $\mathbb{C}l(V,q)$ die durch $Pin(V,q)$ erzeugt wird ist die ganze Algebra $\mathbb{C}l(V,q)$, denn $\{v \in V \,|\, |v| = 1\} \subset V \subset Pin(V,q)$, damit folgt die Irreduzibilität folgt aus der Tatsache, dass (3.2) ein Isomorphismus ist. Eine Darstellung ρ heißt unitär, wenn

$$\langle \rho(\phi)v, \rho(\phi)v' \rangle_{\mathbb{C}} = \langle v, v' \rangle_{\mathbb{C}} \text{ für alle } v, v' \in S,\ \phi \in Pin(V,q).$$

Die Darstellung ist unitär, weil $\psi(v)$ für $v \in V$ $\psi^*(v) = -\psi(v)$ nach Definition ist; aus (3.1) folgt, dass $\psi(v)^2 = -|v|^2 \mathbb{1}$, und weil nach Definition von $Pin(V,q)$ für alle $v \in V$ $|v| = 1$ ist. Also ist $\psi(v)$ unitär und durch tensorielle Fortsetzung erhalten wir die Behauptung. Also

$$\psi \colon Pin(V,q) \to U(\Lambda_{\mathbb{C}} V^{\mathbb{C}},\ \langle .\,,.\rangle_{\mathbb{C}}).$$

□

Die Einschränkung von ρ auf $Spin(V,q)$ ist nicht irreduzibel. In der Tat, sei

$$S^+ = S^+(V,q,J) = \Lambda^{(0)}_{\mathbb{C}} V^{\mathbb{C}}, \quad S^- = S^-(V,q,J) = \Lambda^{(1)}_{\mathbb{C}} V^{\mathbb{C}}, \tag{3.3}$$

mit $\dim S^{\pm} = 2^{k-1}$.

Der $Spin(V,q)$–Modul läßt die Räume S^+ und S^- invariant. Wenn wir ψ aus (3.2) auf $\mathbb{C}l^{(0)}(V,q)$ eingeschränken, so erhalten wir isomorphe Abbildung

$$\psi \colon \mathbb{C}l^{(0)}(V,q) \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(S^+) \oplus \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(S^-). \tag{3.4}$$

Folge dazu die Sätz 2.6 und 2.10.

Andererseits gilt für $z \in \mathbb{C}l^{(1)}(V,q)$

$$\psi(z) \colon S^{\pm} \to S^{\mp}.$$

Aus (3.4) erhalten wir ein irreduzible unitäre Darstellung

$$D^{\pm}_{\frac{1}{2}} \colon Spin(V,q) \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(S^{\pm}).$$

Beispiel. Sei $V = \mathbb{R}^{2k}$ mit euklidischem Skalarprodukt und $(e_1, \dots, e_{2k})$ ON–Basis von V. Ferner sei die komplexe Struktur J definiert durch

$$Je_i = e_{i+k}, \quad Je_{i+k} = -e_i, \text{ für } 1 \le i \le k.$$

Wir wollen mit $S(2k) = S(\mathbb{R}^{2k}, \langle .\,,.\rangle, J)$ und $S^{\pm}(2k) = S^{\pm}(\mathbb{R}^{2k}, \langle .\,,.\rangle, J)$ bezeichnen und erhalten auf diese Weise Darstellung

$$D^{\pm}_{\frac{1}{2}} \colon Spin(2k) \to \mathrm{Aut}(S^{\pm}(2k)).$$

Wir untersuchen jetzt den Fall $V = \mathbb{R}^{2k-1}$. Wie wir bereits wissen, ist $Cl_{2k-1} \cong Cl^{(0)}_{2k}$ gegeben durch $v \mapsto v \cdot e_{2k}$ für $v \in \mathbb{R}^{2k-1}$. Und damit erhalten wir aus der Inklusion $Spin(2k-1) \subset Cl_{2k-1}$, dass

$$Spin(2k-1) \hookrightarrow Spin(2k).$$

Wir erhalten also

$$D^{+}_{\frac{1}{2}} \colon Spin(2k-1) \to \mathrm{Aut}(S^{+}(2k)).$$

Die andere Darstellung $D^-_{\frac{1}{2}}\colon \mathit{Spin}(2k-1) \to \mathrm{Aut}(S^-(2k))$ ist äquivalent zu der oben beschriebenen, denn die Abbildung $F \in \mathrm{Iso}(S^+(2k), S^-(2k))$ aus der Definition 1.9 ist gegeben durch

$$\psi(e_{2k})\colon S^+(2k) \to S^-(2k).$$

4. Liealgebra

Es wichtig anzumerken, dass $Cl^{[2]}(V,q) = \mathfrak{spin}(V,q)$ eine Liealgebra Struktur aufweist, mit $[a,b] = a\cdot b - b\cdot a$. In der Tat sei $\{e_i\}$ ON–Basis von V, dann

$$\begin{aligned}
[e_ie_j, e_ke_\ell] &= e_ie_je_ke_\ell - e_ke_\ell e_ie_j \\
&= -2\delta_{jk}e_ie_\ell - e_ie_ke_je_\ell - e_ke_\ell e_ie_j \\
&= -2\delta_{jk}e_ie_\ell + 2\delta_{\ell j}e_ie_k + e_ie_ke_\ell e_j - e_ke_\ell e_ie_j \\
&= -2\delta_{jk}e_ie_\ell + 2\delta_{\ell j}e_ie_k - 2\delta_{ki}e_\ell e_j - e_ke_ie_\ell e_j - e_ke_\ell e_ie_j \\
&= -2\delta_{jk}e_ie_\ell + 2\delta_{\ell j}e_ie_k - 2\delta_{ki}e_\ell e_j + 2\delta_{i\ell}e_ke_j + e_ke_\ell e_ie_j - e_ke_\ell e_ie_j \\
&= -2(\delta_{jk}e_ie_\ell - \delta_{\ell j}e_ie_k + \delta_{ik}e_\ell e_j - \delta_{\ell i}e_ke_j),
\end{aligned}$$

die Jacobi–Identität ist klar. Wir wollen zeigen, dass $T_1(\mathit{Spin}(n)) = \mathfrak{spin}(n)$ ist. Sei dazu $\gamma(t) = x_1(t)\cdots x_{2m}(t)$ eine Kurve in $\mathit{Spin}(n)$ mit $x_i(t) \in S^{n-1}$ und $\gamma(0) = 1$, dann ist

$$\tfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}(t)|_{t=0} = \tfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}(t)|_{t=0}\cdot x_2(0)\cdots x_{2m}(0) + \cdots + x_1(0)\cdots x_{2m-1}(0)\cdot \tfrac{\mathrm{d}x_{2m}}{\mathrm{d}t}(t)|_{t=0}.$$

Wir zeigen, dass jeder Summand von $\dot\gamma(0)$ in $\mathfrak{spin}(n)$ liegt. Wegen $\gamma(0) = 1$, also $1 = x_1(0)\cdots x_{2m}(0) \Rightarrow x_1^{-1}(0) = x_2(0)\cdots x_{2m}(0)$, ist der erste Summand gleich

$$\tfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}(0)\cdot x_1^{-1}(0) = -\tfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}(0)\cdot x_1(0),$$

weil $x\cdot x = -q(x)1 \Rightarrow x^{-1} = -x$ für $x \in S^{n-1}$. Aus $x_1(t)\cdot x_1(t) \equiv -1$ folgt jedoch

$$\dot x_1(t)x_1(t) + x_1(t)\dot x_1(t) = 0,\ \text{d.h. insbesondere, dass } b(\dot x_1(0), x_1(0)) = 0.$$

Also liegt der erste Summand in $\mathfrak{spin}(n)$. Analog, der zweite Summand stimmt mit

$$\begin{aligned}
x_1(0)\dot x_2(0)x_2^{-1}(0)x_1^{-1}(0) &= -x_1(0)\dot x_2(0)x_2(0)x_1^{-1}(0) \\
&= \big\{x_1(0)\dot x_2(0)x_1^{-1}(0)\big\}\big\{x_1(0)x_2(0)x_1^{-1}(0)\big\}
\end{aligned}$$

Weil $b(\dot x_2(0), x_2(0)) = 0$, so sind auch $x_1(0)\dot x_2(0)x_1^{-1}(0)$, $x_1(0)x_2(0)x_1^{-1}(0)$ b–orthogonal und der zweite Summand liegt in $\mathfrak{spin}(n)$. Also ist $T_1(\mathit{Spin}(n)) \subset \mathfrak{spin}(n)$. Weil

$$\dim \mathit{Spin}(n) = \dim SO(n) = \tfrac{n(n-1)}{2} = \dim \mathfrak{spin}(n)$$

stimmen beide Räume überein, und $\mathrm{Lie}(\mathit{Spin}(n)) = T_1(\mathit{Spin}(n)) = \mathfrak{spin}(n)$.

Sei $\tau\colon Cl^{[1]}(V,q) = V \to Cl^{[1]}(V,q) = V$, mit $\tau(a)(v) = [a,v] = a\cdot v - v\cdot a$, wobei $v \in Cl^{[1]}(V,q) = V$ und $a \in \mathfrak{spin}(V,q)$. In der Tat

$$\begin{aligned}[e_ie_j, e_k] &= e_ie_je_k - e_ke_ie_j \\ &\overset{(\mathrm{R})}{=} -2\delta_{jk}e_i + 2\delta_{ki}e_j.\end{aligned}$$

Lemma 4.1. *τ definiert einen Liealgebra–Isomorphismus zwischen $\mathfrak{spin}(V,q)$ und $\mathfrak{so}(V,q)$.*

Beweis. Es ist einfach einzusehen, dass $\tau([a,b])(v) = [\tau(a),\tau(b)](v)$ für alle $v \in V$ ist:

$$\begin{aligned}\tau([a,b])(v) &= \tau(ab)(v) - \tau(ba)(v) = [ab,v] - [ba,v] \\ [\tau(a),\tau(b)](v) &= \tau(a)([b,v]) - \tau(b)([a,v]) = [a,[b,v]] - [b,[a,v]] \\ &= abv - avb - bva + vba - bav + bva - avb + vab \\ &= abv - vab - bav + vab = [ab,v] - [ba,v].\end{aligned}$$

Also definiert τ einen Liealgebra–Homomorphismus von $\mathfrak{spin}(V,q)$ nach $\mathfrak{gl}(V,q)$. Für $a \in Cl^{[2]}(V,q)$ ist

$$\begin{aligned}b(\tau(a)v,w) + b(v,\tau(a)w) &= b(av,w) - b(va,w) + b(v,aw) - b(v,wa) \\ &= -\tfrac{1}{2}\big(avw + wav - vaw - wva + vaw + awv - vwa - wav\big) \\ &= -\tfrac{1}{2}\big(avw + awv - wva - vwa\big) = 0.\end{aligned}$$

Deshalb ist $\tau(a) \in \mathfrak{so}(V,q)$, τ ist injektiv für alle $a \in Cl^{[2]}(V,q)$ nach der Folgerung aus dem Satz 1.2. Weil schließlich $\mathfrak{spin}(V,q)$ und $\mathfrak{so}(V,q)$ Vektorräume sind mit Diminsion $\frac{n(n-1)}{2}$, folgt die Aussage. □

5. Die Gruppe $Spin^{\mathbb{C}}(n)$

Definition 5.1. $Spin^{\mathbb{C}}(V,q)$ ist multiplikative Gruppe der Einheiten von $\mathbb{C}l(V,q)$, die durch $Spin(V,q)$ und $U(1)$ erzeugt wird.

Weil $Spin(n) \cap U(1) = \{-1,+1\}$ ist die Gruppe $Spin^{\mathbb{C}}(n)$ offenbar gegeben durch

$$Spin^{\mathbb{C}}(n) = Spin(n) \times_{\mathbb{Z}_2} U(1) = (Spin(n) \times U(1))/\mathbb{Z}_2.$$

Die Elemente von $Spin^{\mathbb{C}}(n)$ sind also Klassen $[\varphi, z]$ von Paaren (φ, z) mit Äquivalentzrelation $(\varphi, z) \sim (-\varphi, -z)$.

Literatur

[1] H. B. Lawson, M–L. Michelsohn *Spin Geometry*, Princeton University Press 1989.
[2] T. Friedrich *Dirac–Operatoren in der Riemannschen Geometrie*, Vieweg 1997.
[3] J. Jost *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, Spinger 1998.
[4] M. E. Taylor *Partial Differrential Equation II*, Springer 1996.