Die Clifford Algebren

Jan Sahner

April 2001

Zusammenfassung

Dieser Vortrag führt die Clifford Algebren C^k ein, die in ähnlicher Weise aus der Tensoralgebra hervorgehen wie die äußere Algebra $\Lambda(\mathbb{R}^k)$. Teilräume $Pin(k)$, $Spin(k)$ werden eingeführt, beides doppelte Überlagerungen von $O(k)$ bzw. $SO(k)$.
Abschließend werden die Algebren C^k berechnet und $C^k - Moduln$ eingeführt und entschieden, wieviele verschiedene es gibt.

Inhaltsverzeichnis

1 Definitionen

1.1 Die Clifford Algebra

Sei $\mathbb{K}$ Körper, V Vektorraum über $\mathbb{K}$. Bezeichne $T(V)$ die Tensoralgebra über V, also

$$T(V) = \sum_{i=0}^{\infty} T^i(V), \qquad T^i(V) = \bigotimes^{i} V, \qquad T^0 = \mathbb{K}$$

Sei Q' eine Bilinearform, $Q : V \to \mathbb{R}, v \mapsto Q'(v,v)$ die dazugehörige quadratische Form. Sei $I(Q)$ das Ideal in der Tensoralgebra $T(V)$, das von $x \otimes x - Q(x) \cdot 1$ erzeugt wird.

Definition 1 *$C(Q) := \frac{T(V)}{I(Q)}$ mit Multiplikation $\cdot$ heißt Clifford Algebra von Q.*

Sei $p : T(V) \to C(Q)$ die Projektion. Dann ist $i_Q : V \overset{i}{\hookrightarrow} T(V) \overset{p}{\to} C(Q)$ injektiv, weil $p|_{V \subset T(V)}$ injektiv ist (aus V wird nichts herausgeteilt). Es gilt

Lemma 1 *Es gilt:*

1. *Ist $(v_i)_{i=1}^n$ orthogonale Basis von V bzgl. Q, so ist wegen $v_i \cdot v_j = -v_j \cdot v_i$*

   $$1, v_{i_1} \cdot \dots \cdot v_{i_k}, \qquad i_1 < \dots < i_k$$

   Basis von $C(Q)$ und somit dim $C(Q) = 2^n$

2. *Definiere $C^0(Q) := p(\sum_{i=0}^{\infty} T^{2i}(V)), C^1(Q) := p(\sum_{i=0}^{\infty} T^{2i+1}(V))$. Dann ist $C(Q) = C^0(Q) + C^1(Q)$ eine $\mathbb{Z}_2$ graduierte Algebra, d.h.*

   $$C^i(Q) \cdot C^j(Q) \subset C^{i+j(mod 2)}(Q)$$

3. *Sei $\Phi : V \to A$ eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung in eine $\mathbb{K}$-Algebra mit 1 und $\Phi(x) \cdot \Phi(x) = Q(x) \cdot 1 \ \forall x \in V$. Dann $\exists! \ \tilde{\Phi} : C(Q) \to A$, die Φ erweitert, also $\tilde{\Phi} \circ i_Q = \Phi$ (universelle Eigenschaft der Cliffordalgebra).*

Beweis: zu 1):

$$\begin{aligned} v_i v_j + v_j v_i &= (v_i + v_j) v_j + (v_i + v_j) v_i - Q(v_i) - Q(v_j) \\ &= (v_i + v_j) \cdot (v_i + v_j) - Q(v_i) - Q(v_j) \\ &= Q(v_i + v_j) - Q(v_i) - Q(v_j) = -2Q(v_i, v_j) = 0 \end{aligned}$$

zu 3): Definiere Algebrenhomomorphismus $\Phi' : T(V) \to A, x_1 \otimes \dots \otimes x_k \mapsto \Phi(x_1) \cdot \dots \cdot \Phi(x_k)$ eindeutig, wohldefiniert und definiere für $y \in C(Q)$ mit $y = p(x)$ für $x \in T(V)$:

$$\tilde{\Phi}(y) := \Phi'(x).$$

Überprüfe Wohldefiniertheit von $\tilde{\Phi}$, also Unabhängigkeit von der Wahl von x: Dafür zeige $\Phi'(\tau \otimes (z \otimes z - Q(z) \cdot 1) \otimes \eta) = 0$, da $p(x) = p(x') \Leftrightarrow x - x' = \tau \otimes (z \otimes z - Q(z) \cdot 1) \otimes \eta$ oder Linearkombinationen von Elementen dieser Form. Aber $\Phi'(z \otimes z - Q(z) \cdot 1) = \Phi(z) \cdot \Phi(z) - Q(z) \cdot 1 = 0$.

□

1.2 Die Automorphismen $\alpha, {}^t, {}^-$

Die Abbildung ${}^t : T^k \to T^k, \quad (x_1 \otimes \dots \otimes x_k)^t \mapsto x_k \otimes \dots \otimes x_1$ überträgt sich auf $C(Q)$, da ^{t} $I(Q)$ invariant lässt, $(x \otimes x - Q(x) \cdot 1)^t = x \otimes x - Q(x) \cdot 1$. $\alpha : C(Q) \to C(Q)$ ist definiert als die (nach der universellen Eigenschaft der Cliffordalgebra eindeutig existierende) Erweiterung von $\alpha : V \to C(Q), \quad \alpha(x) = -i_Q(x)$. α erweitert, da $\alpha(x)^2 = (-i_q(x)) \cdot (-i_{Q(x)}) = x \cdot x = Q(x) \cdot 1$. ${}^-: C(Q) \to C(Q)$

ist definiert durch $\bar{x} := \alpha(x^t) = (\alpha(x))^t$. α ist ein Automorphismus, ${}^t, {}^-$ sind Antiautomorphismen. Es gilt $\alpha^2 = Id$ Für irreduzible Elemente in C(Q) $x = x_1 \cdot \cdots \cdot x_k$ ist $\alpha(x) = (-1)^k x$, da $\alpha(x) = \alpha(x_1) \cdot \cdots \cdot \alpha(x_k) = (-x_1) \cdot \cdots \cdot (-x_k) = (-1)^k x$. Somit können wir unsere $\mathbb{Z}_2$-Graduierung von $C(Q)$ auch über

$$C^0(Q) = \{x \in C(Q) | x = \alpha(x)\}, \quad C^1(Q) = \{x \in C(Q) | x = -\alpha(x)\}$$

erhalten.

2 Die Algebren C_k

Für uns sind hauptsächlich die Algebren $C_k := C(Q_k)$ interessant, wobei $Q_k : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ die negative euklidische quadratische Form ist: $Q_k(x_1, \ldots, x_k) = -\sum_{i=1}^k x_i^2$

Lemma 2 *Die Algebren C_k können aufgefasst werden als die von $e_1, \ldots e_k$ multiplikativ erzeugten Algebren unter den Bedingungen*

$$e_j^2 = -1, \qquad e_j \cdot e_k + e_k \cdot e_j = 0, \quad j \neq k$$

Beweis: Übung.

$\square$

3 Die Gruppen $\Gamma_k, Pin(k), Spin(k)$

Sei C_k^* die multiplikative Gruppe invertierbarer Elemente in C_k.

Definition 2 Γ_k *ist die Untergruppe aller $x \in C_k^*$, fr die*

$$\forall y \in \mathbb{R}^k : \alpha(x) y x^{-1} \in \mathbb{R}^k$$

Da $\alpha, x \mapsto x^t$ den $\mathbb{R}^k$ invariant lassen, gilt, dass α und ^{t} Γ_k invariant lassen und somit Morphismen auf Γ_k darstellen. Zentral in dieser Überlegung ist die Abbildung

$$\rho : \Gamma_k \to Aut(\mathbb{R}^k), \quad x \mapsto (y \mapsto \alpha(x) y x^{-1})$$

die sogenannte *getwisted adjungierte Darstellung* von Γ_k auf $\mathbb{R}^k$.

Definition 3 $N : \Gamma_k \to C_k$ *sei definiert als* $N(x) := x\bar{x}$.

Wir zeigen nun, dass $N(\Gamma_k) \subset \mathbb{R}^*$ und dass N ein Gruppenhomomorphismus ist. Das rechtfertigt die

Definition 4 $Pin(k) := ker N \subset \Gamma_k \subset C_k$

Das vorher Behauptete liefern die folgenden Lemmata:

Lemma 3 $ker\rho = \mathbb{R}^*$

Lemma 4 $N(\Gamma_k) \subset \mathbb{R}^*$

Beweis von Lemma 4: Wir zeigen, mit Lemma 3, dass $N(x) \subset ker\rho$. Für $x \in \Gamma_k$ gilt $\forall y \in \mathbb{R}^k$:

$$\alpha(x)yx^{-1} = \rho(x)(y) =: y' \in \mathbb{R}^k$$

Transponieren ergibt, da ${}^t = id$ auf $\mathbb{R}^k$:

$$(x^t)^{-1}y\alpha(x)^t = \alpha(x)yx^{-1}, \text{also } y\alpha(x^t)x = x^t\alpha(x)y$$

und somit

$$y = x^t\alpha(x)y(\alpha(x^t)x)^{-1} \overset{\alpha^2=id}{=} \alpha(\alpha(x^t)x)y(\alpha(x^t)x)^{-1}$$

Also ist $\alpha(x^t)x \in ker\rho = \mathbb{R}^*$ und, weil $\lambda^t = \lambda \forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$$N(x^t) = x^t\bar{x^t} = x^t\alpha(x^{t^t}) = x^t\alpha(x) = \alpha(x^t)x \in \mathbb{R}^*$$

Da ^{t} ein Automorphismus ist, gilt $N(x) \in \mathbb{R}^* \forall x \in \Gamma_k$

□

Beweis von Lemma 3: $x \in Ker(\rho) \Rightarrow$

$$\alpha(x)y = yx \qquad \forall y \in \mathbb{R}^k$$

Mit $x = x^0 + x^1, x^i \in C_k^i$ wird das zu

$$\begin{aligned} x^0y &= yx^0 \\ x^1y &= -yx^1 \end{aligned} \tag{1}$$

Sei $e_1, \ldots e_k$ ONB vom $\mathbb{R}^k, x^0 = a^0 + e_ib^1$, wobei $a^0 \in C_k^0$ e_i nicht enthält und $b^1 \in C_k^1$ e_i nicht enthält. Setze in (1) $y = e_i$ und erhalte $a^0 + e_ib^1 = e_ia^0e_i^{-1} + e_i^2b^1e_i^{-1} = a_0 - e_ib^1$. Daraus folgt $b^1 = 0$. Also enthält x^0 keines der e_i. Also ist x^0 ein Vielfaches von 1. Analog erhält man x^1 ist ein Vielfaches von 1, also $x^1 = 0$, da $x^1 \in C_k^1$. Also ist $x = \lambda \in \mathbb{R}$ und, da x invertierbar, $x \in \mathbb{R}^*$

□

Lemma 5 $N : \Gamma_k \to \mathbb{R}^*$ *ist ein Homomorphismus, und* $N(\alpha(x)) = N(x)$

Beweis: Seien $x, y \in \Gamma_k$

$$N(x \cdot y) = xy \cdot \bar{x}\bar{y} = xy\bar{y}\bar{x} = x \cdot N(y) \cdot \bar{x} = N(x)N(y)$$

und

$$N(\alpha(x)) = \alpha(x)\alpha(\alpha(x)^t) = \alpha(N(x)) = N(x)$$

$\square$

Nun zeigen wir, dass $Pin(k) \subset \Gamma_k$ eine doppelte Überlagerung von $O(k)$ ist. Hierfür brauchen wir zunächst

Lemma 6 $\rho(\Gamma_k) \subset O(k)$

Beweis: Für $x \in \mathbb{R}^k$ gilt: $N(x) = x \cdot \alpha(x^t) = x \cdot (-x) = -Q(x) = |x|^2$ ist die euklidische Länge. Da N ein Gruppenhomomorphismus ist, gilt:

$$N(\rho(x) \cdot y) = N(\alpha(x)yx^{-1}) = N(\alpha(x))N(y)N(x^{-1}) = N(y)$$

$\square$

Also $\rho : \Gamma_k \to O(k)$. $Pin(k) = kerN$ kann daher als eine verallgemeinerte Sphäre aufgefasst werden. Nun können wir das vorhin Angedeutete beweisen:

Theorem 1 *Wir haben eine kurze exakte Sequenz*

$$1 \to \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{i} Pin(k) \xrightarrow{\rho} O(k) \to 1$$

wobei $\mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$*. D.h.,* ρ *ist surjektiv und hat Kernel* $\mathbb{Z}_2$*, also* $O(k) \simeq \frac{Pin(k)}{\mathbb{Z}_2}$

Beweis: Surjektivität von ρ: Für (v_i) ONB auf $\mathbb{R}^k$ gilt $N(v_i) = 1$ und:

$$\rho(v_i)v_j = \alpha(v_i)v_jv_i^{-1} = v_iv_jv_i = \begin{cases} -v_j & falls\ i = j \\ v_j & falls\ i \neq j \end{cases}$$

Also ist jede Reflexion an einer Hyperebene in $\rho(Pin(k))$, also ist ρ surjektiv.

$$\begin{aligned} ker\rho|_{Pin(k)} &= ker\rho \cap kerN \\ &\Rightarrow x \in ker\rho|_{Pin(k)} \\ &\Leftrightarrow x = \lambda \cdot 1, N(\lambda \cdot 1) = 1 \\ &\Rightarrow \lambda = \pm 1 \Rightarrow ker\rho|_{Pin(k)} = \mathbb{Z}_2 \qquad (2) \end{aligned}$$

$\square$

Definition 5 $Spin(k) := \rho^{-1}(SO(k))$

Da $\mathbb{Z}_2 \subset Spin(k)$ (da $\rho(\mathbb{Z}_2) = \{Id\} \subset SO(k)$), sind wie eingangs erwähnt $Pin(k)$ und $Spin(k)$ doppelte Überlagerungen von $O(k)$ bzw. $SO(k)$.

Theorem 2 *Für* $Pin(k)^i := Pin(k) \cap C_k^i$ *gilt:* $Pin(k) = \bigcup_i Pin(k)^i$ *und* $Spin(k) = Pin(k)^0 (= (kerN)^0)$

Beweis: Für $x \in Pin(k)$ gilt $\rho(x) = R_1 \circ \cdots \circ R_l \in O(k)$, wobei die R_i Reflexionen an Hyperebenen sind. Wie oben im Beweis der Surjektivität von ρ können wir x_i wählen mit $\rho(x_i) = R_i$, so dass $x = \pm x_1 \ldots x_l$, weil $ker\rho = \mathbb{Z}_2$. Also $x \in C_k^0$ oder $x \in C_k^1$. Da $\rho(x) \in SO(k) \Leftrightarrow l$ gerade, ist $x \in Spin(k) \Leftrightarrow \rho(x) \in SO(k) \Leftrightarrow x \in C_k^0$.

$\square$

Bemerkung: $Spin(k)$ ist eine nichttriviale doppelte Überlagerung von $SO(k)$. Dafür überlegen wir uns, dass wir 1 und -1 in $Spin(k)$ durch einen Pfad verbinden können. In der Tat erbringt der Pfad $t \overset{\beta}{\mapsto} \cos(t) + \sin(t) e_1 \cdot e_2, \quad 0 \leq t \leq 1$ das gewünschte, da $\beta(t) \in C_k^0$ und $N(\beta(t)) = 1 \forall t \in [0,1]$.

3.1 Komplexifizierung

Die ganze Theorie kann komplexifiziert werden. Dann ist $C_k^c := C_k \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Definiere darauf

$$\alpha(x \otimes z) = \alpha(x) \otimes z, \qquad (x \otimes z)^t = x^t \otimes \bar{z}$$

und darüber N und $^-$ wie vorher. Γ_k^c ist nun die Untergruppe der invertierbaren Elemente, für die

$$\forall y \in \mathbb{R}^k : \alpha(x) \cdot y \otimes 1 \cdot x^{-1} = y' \otimes 1, \quad \text{mit } y' \in \mathbb{R}^k$$

Alle Erkenntnisse der vorherigen Lemmata bleiben erhalten, außer dass $\mathbb{R}^*$ durch $\mathbb{C}^*$ ersetzt wird und die kurze exakte Sequenz zu

$$1 \to U(1) \overset{i}{\to} Pin^c(k) \overset{\rho^c}{\to} O(k) \to 1$$

wird, wobei $U(1) = \{1 \otimes z \| z|^2 = 1\}$.(Denn immer noch ist $ker\rho^c|_{Pin^c(k)} = ker\rho^c \cap kerN = \{1 \otimes z | z \in \mathbb{C}^*\} \cap \{kerN \otimes z \| z|^2 = 1\})$

4 Berechnung der Algebren C_k

Um die C_k zu berechnen, geht man induktiv vor, indem man sukzessive C_k, C_k' berechnet, wobei $C_k' = C(-Q_k)$ die Algebra ist, die von den e_i multiplikativ erzeugt wird mit $e_i^2 = +1, \quad e_i e_j + e_j e_i = 0$ für $i \neq j$

Lemma 7 *(Induktionsanfang)*

$$\begin{aligned}
C_1 &\simeq \mathbb{C}, & &1 \mapsto 1, e_1 \mapsto i \\
C_2 &\simeq \mathbb{H}, & &1 \mapsto 1, e_1 \mapsto i, e_2 \mapsto j, e_1 e_2 \mapsto k \\
C_1' &\simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, & &1 \mapsto (1,1), e_1 \mapsto (1,-1) \\
C_2' &\simeq \mathbb{R}(2), & &1 \mapsto E_2, e_1 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, e_2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_1 e_2 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$\square$

Lemma 8 *(Induktionslemma)*

$$\begin{aligned}
C_k \otimes_{\mathbb{R}} C_2' &\simeq C_{k+2}' \\
C_k' \otimes_{\mathbb{R}} C_2 &\simeq C_{k+2}
\end{aligned}$$

Beweis: Die lineare Abbildung $\Psi : \mathbb{R}'^{k+2} \to C_k \otimes C_2'$, definiert durch

$$\Psi(e_i') = \begin{cases} e_{i-2} \otimes e_1' e_2' & 2 < i \leq k \\ 1 \otimes e_i' & 1 \leq i \leq 2 \end{cases}$$

erfüllt $\Psi(x)^2 = -Q_k(x) \cdot 1$ und erweitert daher zu $\Psi : C_{k+2}' \to C_k \otimes C_2'$. Da Ψ Basiselemente auf Basiselemente abbildet, ist Ψ Isomorphismus. Die zweite Aussage geht analog

□

Aus dem Induktionslemma 8 folgt:

$$\begin{aligned} C_4' &\simeq C_2 \otimes_{\mathbb{R}} C_2' \simeq C_2' \otimes_{\mathbb{R}} C_2 \simeq C_4 \\ C_8 &\simeq C_6' \otimes_{\mathbb{R}} C_2 \simeq C_4 \otimes_{\mathbb{R}} C_2' \otimes_{\mathbb{R}} C_2 \simeq C_4 \otimes_{\mathbb{R}} C_4 \\ C_{k+8} &= C_{k+4} \otimes_{\mathbb{R}} C_4 \simeq C_k \otimes_{\mathbb{R}} C_4 \otimes_{\mathbb{R}} C_4 = C_k \otimes_{\mathbb{R}} C_8 \end{aligned}$$

Bezeichne $\mathbb{K}(m)$ die Matrixalgebra der $m \times m$-Matrizen über dem Körper $\mathbb{K}$. Die bekannten Formeln

$$\begin{aligned} \mathbb{K}(n) &\simeq \mathbb{R}(n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{K}, \mathbb{R}(n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(m) \simeq \mathbb{R}(nm) \\ \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} &\simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \\ \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} &\simeq \mathbb{C}(2) \\ \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} &\simeq \mathbb{R}(4). \end{aligned}$$

führen nun durch überschaubares Rechnen mit den Induktionslemmata 7 und 8 zu folgender Tabelle über die Clifford-Algebren:

k	C_k	C_k'	$C_k \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = C_k' \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$
1	$\mathbb{C}$	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$
2	$\mathbb{H}$	$\mathbb{R}(2)$	$\mathbb{C}(2)$
3	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{C}(2) \oplus \mathbb{C}(2)$
4	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{C}(4)$
5	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{H}(2) \oplus \mathbb{H}(2)$	$\mathbb{C}(4) \oplus \mathbb{C}(4)$
6	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{C}(8)$
7	$\mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{C}(8) \oplus \mathbb{C}(8)$
8	$\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{C}(16)$

Da $C_8 = \mathbb{R}(16)$ und $C_i \simeq \mathbb{K}(m)$ bzw. $\mathbb{K}(m) \oplus \mathbb{K}(m)$ für $1 \leq i \leq 8$ folgt die 8-Periodizität

$$\begin{aligned} C_{k+8} &\simeq C_k \otimes_{\mathbb{R}} C_8 \simeq \mathbb{K}(m) \otimes_{\mathbb{R}} C_8 \simeq \mathbb{K}(m) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(16) \\ &\simeq \mathbb{K} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(m) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(16) \simeq \mathbb{K} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(16m) \\ &\simeq \mathbb{K}(16m) \end{aligned}$$

der Clifford-Algebren C_k. Für die Komplexifizierungen ergeben sich Periodizitäten von 2.

5 Clifford Moduln

Ein C_k-Modul über $\mathbb{K}$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, der ein Modul über C_k ist. Äquivalent dazu ist, dass eine $\mathbb{K}$-Darstellung ρ existiert, also ein $\mathbb{K}$-Algebren-Homomorphismus

$$\rho : C_k \to Hom_{\mathbb{K}}(W, W)$$

Der Zusammenhang zwischen C_k-Modul und $\mathbb{K}$-Darstellung besteht in der Multiplikation

$$\phi \cdot x = \rho(\phi)(x)$$

die einerseits eine C_k-Modulstruktur definiert wenn ρ $\mathbb{K}$-Darstellung, andererseits eine $\mathbb{K}$-Darstellung, wenn W C_k-Modul ist.

Theorem 3 *($\mathbb{K}$-Algebren-Darstellungssatz)*
Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ist die natürliche Darstellung von $\mathbb{K}(n)$ auf den $\mathbb{K}^n$, $\rho(A)(x) := A \cdot x$ die einzige Darstellung (bis auf Äquivalenz). Die Algebra $\mathbb{K}^n \oplus \mathbb{K}^n$ hat genau zwei Darstellungen, gegeben durch

$$\rho_1(A_1, A_2) = \rho(A_1), \qquad \rho_1(A_1, A_2) = \rho(A_2)$$

Beweis: siehe Lang. Hieraus folgt die unten abgebildete Tabelle. ν_k ist die Anzahl verschiedener C_k-Moduln, 1, wenn $C_k \simeq \mathbb{K}(m)$, 2, wenn $C_k \simeq \mathbb{K}(m) \oplus \mathbb{K}(m)$. d_k ist die $\mathbb{R}$-Dimension des Moduls. Analog sind ν_k^c und d_k^c definiert. Die Periodizitäten sind wie im letzten Abschnitt.

k	C_k	ν_k	d_k	$C_k \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = C'_k \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$	ν_k^c	d_k^c
1	$\mathbb{C}$	1	2	$\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$	2	1
2	$\mathbb{H}$	1	4	$\mathbb{C}(2)$	1	2
3	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	2	4	$\mathbb{C}(2) \oplus \mathbb{C}(2)$	2	2
4	$\mathbb{H}(2)$	1	8	$\mathbb{C}(4)$	1	4
5	$\mathbb{C}(4)$	1	8	$\mathbb{C}(4) \oplus \mathbb{C}(4)$	2	4
6	$\mathbb{R}(8)$	1	8	$\mathbb{C}(8)$	1	8
7	$\mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8)$	2	8	$\mathbb{C}(8) \oplus \mathbb{C}(8)$	2	8
8	$\mathbb{R}(16)$	1	16	$\mathbb{C}(16)$	1	16