Prof. Dr. Werner Müller
Dr. Fabian Meier

Wintersemester 2010/11

8. Übung Globale Analysis I

Abgabe am Montag, den 13. Dezember, in der Vorlesungspause.

Bei Fehlern oder Fragen bitte eine eMail an: `brief`α`fabianmeier.de` .

Aufgabe 1 (exakte Sequenz). (3 Punkte)

Sei V ein Vektorraum und $\xi \in V$ ein nicht-verschwindender Vektor. Dann ist

$$\Lambda_p(V) \xrightarrow{\xi\wedge} \Lambda_{p+1}(V) \xrightarrow{\xi\wedge} \Lambda_{p+2}(V)$$

eine exakte Sequenz, d.h. das Bild der ersten Abbildung ist gleich dem Kern der zweiten Abbildung.

Aufgabe 2 (Sternförmige Gebiete). (5 Punkte)

Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein sternförmiges Gebiet. Es seien $f_i \in C^\infty(U)$, $i = 1, ..., n$. Zeigen Sie: Es gibt ein $g \in C^\infty(U)$ mit

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = f_i, \quad i = 1, ..., n,$$

genau dann, wenn die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, ..., n,$$

erfüllt ist.

Aufgabe 3 (Lie-Ableitung: Formel). (5 Punkte)

Für $X \in \mathcal{V}(M)$ sei L_X die Lie-Ableitung und $\iota(X)$ die innere Multiplikation auf $\Lambda^*(M)$. Zeigen Sie, daß folgende Gleichung gilt:

$$L_X = \iota(X) \circ d + d \circ \iota(X)$$

Hinweis: Man zeige zuerst, daß es sich bei beiden Ausdrücken um Derivationen handelt. Anschließend nutze man, daß beide Ausdrücke mit d kommutieren und führe die Aussage so von $\Lambda^k(M)$ auf Funktionen zurück.

Aufgabe 4 (Lie-Ableitung: konkret). (4 Punkte)

1. Betrachte T^2 wie auf dem letzten Übungsblatt. Gibt es ein Vektorfeld X, so daß $L_X(dx) = dy$?
2. Gibt es auf $\mathbb{R}^2$ ein Vektorfeld X mit $L_X(dx) = dy$?
3. Sei α eine geschlossene Einsform mit $[\alpha] \neq 0$ über einer Mannigfaltigkeit M. Gibt es ein Vektorfeld X mit $L_X(\alpha) = \alpha$?