Prof. Dr. Werner Müller
Dr. Fabian Meier

Wintersemester 2010/11

7. Übung Globale Analysis I

Abgabe am Montag, den 6. Dezember, in der Vorlesungspause.

Bei Fehlern oder Fragen bitte eine eMail an: `brief`α`fabianmeier.de` .

Aufgabe 1. (5 Punkte)
Es sei $\omega \in \Lambda^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ gegeben durch

$$\omega = -\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}\, dx_1 + \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}\, dx_2.$$

Zeigen Sie, dass ω geschlossen, aber nicht exakt ist (d.h.: $d\omega = 0$, aber es existiert kein $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ mit $\omega = df$).

Hinweis: Betrachten Sie das Integral von ω entlang der Kurve $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Aufgabe 2. (5 Punkte)
Es sei $\omega \in \Lambda^p(M)$. Beweisen Sie, dass für alle $X_0, ..., X_p \in \mathcal{V}(M)$ die folgende Formel gilt:

$$\begin{aligned} d\omega(X_0, ..., X_p) = &\sum_{i=0}^{p} (-1)^i X_i \left(\omega(X_0, ..., \hat{X}_i, ..., X_p) \right) \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, ..., \hat{X}_i, ..., \hat{X}_j, ..., X_p). \end{aligned}$$

Hierbei bedeutet das Hütchen auf den Variablen, dass man diese streicht.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass die rechte Seite eine $C^\infty(M)$- alternierende multilineare Form auf $\mathcal{V}(M)^{p+1}$ ist. Es genügt dann, diese Formel für jede Karte (U, ϕ) von M und für $X_0, ..., X_p \in \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} : 0 \leq i \leq p \right\}$ zu beweisen.

Aufgabe 3 (De Rham-Kohomologie des 2-Torus)**.** (5 Punkte)
Es sei $\mathrm{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

1. Begründe, warum $H^0(\mathrm{T}^2) = \mathbb{R}$.
2. Es sei $\omega = \phi(x, y)dx + \psi(x, y)dy \in \Omega^1(\mathrm{T}^2)$, d.h. ϕ und ψ sind $\mathbb{Z}^2$-periodisch. Es sei ω geschlossen. Zeige, dass dann die Funktionen

$$y \mapsto \int_0^1 \phi(x', y)dx', \quad x \mapsto \int_0^1 \psi(x, y')dy'$$

konstant sind.

3. Es sei ω wie oben. Zeige, dass ω genau dann exakt ist, wenn

$$\int_0^1 \phi(x',0)dx' = 0 \text{ und } \int_0^1 \psi(0,y')dy' = 0.$$

   Man folgere, dass $H^1(\mathrm{T}^2) = \mathbb{R}[dx] \oplus \mathbb{R}[dy]$.

4. Es sei $\omega = f(x,y)dx \wedge dy$ eine 2-Form, d.h. f ist $\mathbb{Z}^2$-periodisch. Zeige, dass ω genau dann exakt ist, wenn

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dxdy = 0.$$

   Folgere, dass $H^2(\mathrm{T}^2) = \mathbb{R}[dx \wedge dy]$.

Hinweis zu (4): Man betrachte die Form $\eta = \phi(x,y)dx + \psi(x,y)dy$ mit

$$\phi(x,y) = -\int_0^y \int_0^1 f(x',y')dx'dy', \quad \psi(x,y) = \int_0^x f(x',y)dx' - x\int_0^1 f(x',y)dx'.$$

Wann ist η eine glatte 1-Form auf T^2?

Aufgabe 4 (Pullback). (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Abbildung

$$f(x,y,z) = \big(x - \sin y,\, e^{yz} - 1,\, 2x\big)$$

Man berechne das Pullback $f^*\big(z^2\, dx \wedge dy\big)$. Die Antwort soll dabei von der Form $g_1\, dx \wedge dy + g_2\, dy \wedge dz + g_3\, dz \wedge dx$ sein, wobei g_1, g_2, g_3 explizite Funktionen sind.