Prof. Dr. Werner Müller
Dr. Fabian Meier

Wintersemester 2010/11

6. Übung Globale Analysis I

Abgabe am Montag, den 29. November, in der Vorlesungspause.

Bei Fehlern oder Fragen bitte eine eMail an: `brief`α`fabianmeier.de` .

Aufgabe 1 (Vollständigkeit von Vektorfeldern). (4 Punkte)

1. Gebe auf $\mathbb{R}$ ein glattes Vektorfeld an, welches nicht vollständig ist.
2. Sei V ein glattes Vektorfeld auf $\mathbb{R}$ mit $\lim_{x\to\pm\infty} V(x) = 0$ und außerdem $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\partial^n V(x)}{\partial^n x} = 0$ für alle $n \geq 1$. Zeige, daß V vollständig ist.

Aufgabe 2 (Eigentliche Abbildungen). (5 Punkte)

Es seien, $k \leq n$, $U \subset \mathbb{R}^k$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit. Zusätzlich sei f eine *eigentliche* Abbildung, d.h. für alle kompakten Teilmengen $K \subset \mathbb{R}^n$ ist $f^{-1}(K)$ kompakt. Zeige, dass f eine Einbettung ist.

Aufgabe 3 (Flüsse kommutieren nicht). (4 Punkte)

Definiere im $\mathbb{R}^2$ die Vektorfelder

$$V = x\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial x}, \qquad W = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$$

Berechne die Flüsse θ und ϕ von V und W. Zeige, daß sie nicht kommutieren, d.h. daß es Zeiten t und s gibt mit $\theta_s \circ \phi_t \neq \phi_t \circ \theta_s$.

Aufgabe 4 (Kontraktion). (4 Punkte)

Sei V ein k-dimensionaler Vektorraum. Für jedes $\omega \in \Lambda^p(V^*)$ definieren wir $\iota_a(\omega) \in \Lambda^{p-1}(V^*)$ (die *Kontraktion* von ω bezüglich $a \in V$) durch

$$\iota_a\big(\omega\big)(v_1, \ldots, v_{p-1}) = \omega(a, v_1, \ldots, v_{p-1}).$$

Für $p = 0$ definieren wir $\iota_a(\omega)$ als 0. Man zeige, daß

$$\iota_a\big(\omega \wedge \eta\big) = \iota_a(\omega) \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge \iota_a(\eta)$$

für alle p-Formen ω und q-Formen η auf V gilt.