Prof. Dr. Werner Müller
Dr. Fabian Meier Wintersemester 2010/11

5. Übung Globale Analysis I

Abgabe am Montag, den 22. November, in der Vorlesungspause.

Bei Fehlern oder Fragen bitte eine eMail an: `brief`α`fabianmeier.de` .

Aufgabe 1 (Abhängigkeit der Abbildung $\mathcal{L}$ von Vektorfeldern). (5 Punkte)

Finde ein Beispiel, in dem folgende Bedingungen erfüllt sind: V_1, V_2 und W sind glatte Vektorfelder auf $\mathbb{R}^2$, wobei auf der x-Achse gilt: $V_1 = V_2 = \frac{\partial}{\partial x}$. Bei 0 unterscheiden sich die Werte von $L_{V_1}W$ und $L_{V_2}W$.

Anmerkung: Dies zeigt, daß es tatsächlich notwendig ist, das Vektorfeld V zu kennen, um $(\mathcal{L}_V W)_p$ zu berechnen; es reicht nicht, nur den Vektor V_p zu kennen oder den Wert von V entlang einer Integralkurve.

Aufgabe 2 (Lie-Algebren). (5 Punkte)

Es sei $\mathfrak{g} \subset M(n, \mathbb{R})$ eine Lie-Algebra von Matrizen, d.h. ein Untervektorraum, so dass

$$\forall_{A,B\in\mathfrak{g}}\, [A, B] = AB - BA \in \mathfrak{g}.$$

Wir setzen für $g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ die Abbildung

$$l_g\colon\ \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), \quad h \mapsto gh.$$

1. Es sei $A \in T_{\mathrm{Id}}\,\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \cong M(n, \mathbb{R})$. Zeige

$$(l_g)_* A := (dl_g)_{\mathrm{Id}}(A) = gA.$$

2. Zu $A \in \mathfrak{g}$ betrachte man das zugehörige linksinvariante Vektorfeld

$$X_A \in C^\infty(T\,\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})), \quad X_A(g) = gA.$$

   Man zeige

$$[X_A, X_B](g) = g[A, B], \quad [X_A, X_B] = X_{[A,B]}.$$

Aufgabe 3 (Fluß in $O(n)$). (5 Punkte)

Es sei $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ schiefsymmetrisch, d.h., $A^t = -A$. Zeigen Sie, dass $\exp(tA) \in O(n)$. Sei

$$f^t\colon O(n) \to O(n)$$

definiert durch $f^t(B) = B\exp(tA)$. Zeigen Sie, dass f^t eine 1-Parametergruppe von Diffeomorphismen ist. Bestimmen Sie das Vektorfeld X auf $O(n)$, dass den Fluss f^t erzeugt.

Aufgabe 4 (Satz 1.35). (4 Punkte)

Beweise den folgenden Satz:

Seien M und N Mannigfaltigkeiten von Dimension k und n und sei $f : M \to N$ eine Immersion. Dann gibt es um jeden Punkt P Karten $\phi : U \to B^k$ auf M und $\psi : V \to B^k \times B^{n-k}$ auf N (wobei B^j die Einheitskugel in Dimension j ist), so daß für alle $u \in U$ gilt: $\psi \circ f(u) = (\phi(u), 0)$.